Universidade de Lisboa

Problemas de otimização no contexto das derivadas

Joana Filipa Oliveira Cabral

Mestrado em Ensino de Matemática

Relatório da Prática de Ensino Supervisionada orientado pela Professora Doutora Hélia Margarida Pintão de Oliveira e coorientado pela Professora Doutora Maria Suzana Metello de Nápoles

2015

Universidade de Lisboa

Problemas de otimização no contexto das derivadas

Joana Filipa Oliveira Cabral

Mestrado em Ensino de Matemática

Relatório da Prática de Ensino Supervisionada orientado pela Professora Doutora Hélia Margarida Pintão de Oliveira e coorientado pela Professora Doutora Maria Suzana Metello de Nápoles

2015

Resumo

O presente relatório é baseado no trabalho desenvolvido com uma turma de 11.º ano do curso de Ciências Socioeconómicas da Escola Secundária com 3.º Ciclo de Caneças. Lecionei nessa turma a unidade de ensino "Taxa de Variação e Derivada", na disciplina de Matemática A, ao longo de um conjunto de 12 aulas, durante o 2.º Período do ano letivo de 2014/2015. O estudo que desenvolvi baseia-se nos dados recolhidos durante a lecionação das últimas quatro aulas da unidade e o seu principal objetivo é compreender como os alunos resolvem problemas de otimização no contexto do tema derivada de uma função, com especial atenção às estratégias adotadas, aos conhecimentos que evidenciam sobre a derivada de uma função e às principais dificuldades apresentadas. A unidade de ensino foi planeada segundo uma abordagem exploratória e, tendo em conta os objetivos de aprendizagem, foram utilizadas tarefas de natureza variada, por vezes com recurso ao *software* GeoGebra ou à calculadora gráfica. Nas aulas finais os problemas tiveram um papel central, tanto pela natureza do estudo como pela importância desta atividade na aprendizagem da Matemática.

O estudo assenta numa metodologia qualitativa recorrendo à observação participante, tendo como principais métodos de recolha de dados as produções escritas de todos os alunos da turma e as notas de campo que fui realizando ao longo da intervenção letiva.

A análise de dados permite concluir que os alunos recorrem principalmente à relação entre o sinal da função derivada, sentido de variação e extremos relativos da função original para resolver problemas de otimização, utilizando a calculadora gráfica para estudar o sinal da função derivada. Embora não se registem muitas dificuldades neste âmbito, os alunos centraram-se mais na aplicação dos procedimentos do que no significado desta relação. Nos problemas iniciais, muitos alunos mostraram pouca preocupação no que se refere ao contexto, aplicando os procedimentos matemáticos sem ter em conta a situação apresentada e terminando muitas vezes os problemas sem apresentar uma resposta. No entanto, foi percetível uma evolução positiva dado que nos últimos problemas grande parte dos alunos aplicou os procedimentos corretamente, tendo em conta o contexto do problema e respondendo adequadamente no final.

Palavras-chave: Derivada, função, problemas de otimização, estratégias, dificuldades

Abstract

This report is based on the work developed with an 11^{th} grade class, in the Socio-economic Sciences course at the *Escola Secundária com 3.º Ciclo de Caneças*. Throughout 12 lessons with the class, which occurred during the 2^{nd} term of the school year 2014/2015, I taught the unit "Rate of Change and Derivative", in Mathematics A subject. The study that I developed is based on the results obtained during the last four lessons and the major goal was to understand how students solve optimization problems in the theme of function derivatives. I had particular interest in the strategies students used, how they used their knowledge of the derivative concept in problem solving and their main difficulties.

The taught unit followed an exploratory approach, according with the established learning goals and included different kinds of tasks, sometimes using technology such as the Geogebra software and the graphic calculator. In the last lessons, I gave special attention to the problem solving.

This study is based on a qualitative methodology and the main instruments used in data collection were the written productions of the students in the classroom, the direct observation and the field notes that I collected during the lessons.

The analysis of the collected data shows that the students used massively the relation between the sign of the derivative function and the monotony and extremes of the original function and used graphic calculator to study the sign of the derivative function. The results show that, although the students were able to apply the relation, they didn't care that much about the meaning of it. At the beginning many students did not pay attention to the context of the problems, and applyed the mathematical procedures not having in mind the situation itself and concluded the problem without giving an answer. However a positive evolution was visible and the majority of students applied the procedures correctly and according to the context of the problem, giving the right answer at the end.

Keywords: Derivative, function, optimization problems, strategies, difficulties

Agradecimentos

Primeiramente tenho de agradecer aos meus pais. Numa sociedade em que os pais se preocupam com a estabilidade futura dos seus filhos, seria de esperar que, pelo menos em alguns momentos, tivessem contestado a minha decisão de me aventurar neste sonho. Tal nunca aconteceu, pelo contrário, sempre se mostraram compreensivos e me incentivaram a lutar pelos meus objetivos. Sem eles nunca teria conseguido e nunca poderei agradecer o suficiente por todo o apoio e amor ao longo de toda a minha vida.

Em segundo lugar todo o meu apreço e gratidão à minha orientadora, a professora Dra. Hélia Oliveira, que foi incansável neste processo. Foi sem dúvida a peça chave na minha formação enquanto professora ao longo do Mestrado e será sempre uma referência na minha vida, tanto profissional como pessoalmente. Muitíssimo obrigada pelo apoio, conselhos, críticas construtivas e muitas horas dedicadas a este trabalho, quando arranjar tempo parecia uma missão impossível.

Um agradecimento especial também à professora Dra. Suzana Nápoles, por todo empenho, dedicação, disponibilidade, apoio e todos os contributos que enriqueceram tanto este trabalho e a minha formação.

Nenhum agradecimento será suficiente, mas muito obrigada à professora Anabela Candeias. Apesar de todo o trabalho que já tem, disponibiliza-se anualmente para acolher futuros professores e dá-nos sempre mais do que recebe. São pessoas assim que nos fazem querer ser melhores profissionais. Obrigada por todo o trabalho extra, pela paciência a todas as horas e pelo grande exemplo enquanto professora.

À Direção da Escola Secundária com 3.º Ciclo de Caneças pela forma como me acolheu e me permitiu a realização deste estudo, muito obrigada. Aos professores que se cruzaram no meu caminho nesta escola, em especial à professora Isabel Gomes (Belinha) e ao professor Pedro Queiroz muitíssimo obrigada pelo carinho, apoio e disponibilidade total.

Não sei se algum dia lerão este trabalho mas um agradecimento gigante à “minha turma”. Este ano, apesar de muito trabalhoso, foi um dos mais felizes que já tive e muito graças a esta turma. Não houve um dia em que não me fizessem ter um sorriso nos lábios e, se voltasse atrás, sei que não poderia ter escolhido uma turma melhor. Nunca tive dúvidas que esta era a profissão que queria seguir, mas se em algum momento estas tivessem existido, morreriam na primeira aula do ano letivo porque a forma como me receberam e me acolheram enquanto professora, fez todo o trabalho de tantos anos de estudo valer a pena. Terão sempre um lugar muito especial no meu coração.

Se desde muito jovem sempre sonhei em ser professora, muito se deve à professora Eva Matias. É o meu exemplo enquanto professora de Matemática e apesar de por vezes não estar satisfeita com o estado do ensino nunca me dirigiu uma palavra que não fosse de incentivo, quando, com o passar dos anos, continuei com este sonho. O seu carinho para com os alunos é tocante e esta afetividade que pode surgir da relação entre professor e aluno foi um dos fatores que sempre me fascinou no ensino. Já passaram 12 anos desde que foi minha professora pela primeira vez e nunca deixou de estar presente na vida… espero que nunca deixe.

Um agradecimento também à minha família e amigos que durante estes dois anos tiveram muita paciência para os meus horários complicados e mesmo quando não estive tão presente quanto devia sempre me compreenderam. Um obrigado especial à Catarina por todo o apoio e à Dani pela paciência.

Aos meus colegas de Mestrado, em especial, e porque estivemos juntos em todas as cadeiras, partilhámos angústias, *stresses*, alegrias e muito cansaço, Filipa, Filomena, Helena e Rui, um obrigado pelo companheirismo. Sei que não me fica mal dizer que fomos sem dúvida um grupo excecional e compartilhar estes anos convosco foi ótimo.

A todos os professores do Mestrado pelos ensinamentos, pelo apoio e por sempre nos brindarem com a sua simpatia e profissionalismo, um enorme agradecimento.

À minha tão querida colega de Mestrado (apesar de em anos diferentes), de Licenciatura e amiga para a vida Nicole, um obrigado gigante pela paciência, por perdoar sempre a minha sinceridade, por ter sempre uma palavra de carinho e por nunca ter desistido dos seus sonhos, fazendo-me acreditar ainda mais nos meus! Estamos quase lá!

Finalmente, e porque tinha de ter um lugar de destaque, à minha companheira de estágio Inês Vasques, um agradecimento por tudo, foi ótimo estarmos lado a lado estes dois anos. Temos a noção que passámos mais tempo juntas do que com qualquer outra pessoa que conhecemos, talvez até do que connosco próprias! Teria sido muito mais difícil aguentar esta viagem sozinha e tê-la ao meu lado nos bons e maus momentos foi essencial.

Obrigada a todos mais uma vez!

Para ser grande, sê inteiro: nada
Teu exagera ou exclui.
Sê todo em cada coisa. Põe quanto és
No mínimo que fazes.
Assim em cada lago a lua toda
Brilha, alta vive.

Ricardo Reis

Índice

Índice de Figuras

Índice de Tabelas

Índice de Anexos

Capítulo 1

Introdução

O presente trabalho consiste no relatório da prática de ensino supervisionada que realizei no âmbito da unidade curricular Iniciação à Prática Profissional IV, do Mestrado em Ensino da Matemática. A intervenção letiva na base deste relatório decorreu entre fevereiro e março de 2015, na Escola Secundária com 3.º Ciclo de Caneças, distrito de Lisboa. Lecionei, numa turma de 11.º ano do curso de Ciências Socioeconómicas, a unidade de ensino "Taxa de Variação e Derivada", da disciplina de Matemática A. Uma vez que este trabalho tem um cariz investigativo, em paralelo com a intervenção letiva realizei um estudo sobre a resolução de problemas de otimização no contexto da unidade de ensino referida, dando especial ênfase às estratégias utilizadas e principais dificuldades dos alunos.

1.1. Motivações

Aprender Matemática é um direito básico de todas as pessoas — em particular, de todas as crianças e jovens — e uma resposta a necessidades individuais e sociais (Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999). Se esta frase não poderia ser mais verdadeira é do conhecimento público que grande parte dos jovens tem dificuldade em compreender a Matemática que é lecionada nas escolas. Os conteúdos matemáticos, principalmente os do nível secundário, são muitas vezes encarados como demasiado abstratos e sem grande utilidade prática. De modo a combater esta ideia é necessário que desde o princípio da escolaridade até ao fim do Ensino Secundário, e de acordo com o nível de desenvolvimento e maturidade dos alunos, estes sejam mergulhados num ambiente estimulante, no qual experimentar e fazer matemática sejam atividades naturais e desejadas (APM, 1990).

Cabe assim ao professor que, em última instância, é o gestor do currículo (Moyer, Cai, Laughlin, & Wang, 2009) promover este ambiente estimulante e para tal a seleção de tarefas é essencial. De entre os vários tipos de tarefa os problemas têm um papel importantíssimo que tem sido referido ao longo de vários séculos. Segundo estudos de Stanic e Kilpatrick (1989), desde a Antiguidade (Egito, Antiga China e Grécia) que os problemas são utilizados para desenvolver a agilidade mental e para preparar os indivíduos para os problemas reais com que se deparam ao longo vida. Esta perspetiva viria a ser a fundação para a forma como se encarou a resolução de problemas ao longo do século XIX e início do século XX, isto é como um veículo que permite desenvolver o raciocínio.

Assim, embora a resolução de problemas sempre tenha feito parte do ensino da Matemática, são os trabalhos de Pólya na segunda metade do século XX que vêm clarificar o seu papel educativo (Ponte, 2005). Para o autor húngaro, a resolução de problemas trás uma dimensão de desafio para a aula de Matemática, permitindo que os alunos experimentem o gosto pela descoberta. Os benefícios da resolução de problemas em sala de aula há muito são defendidos, nomeadamente, na Agenda para a ação do NCTM (1980) é referido que esta prática deve ser o foco da Matemática escolar. Em 1991, o NCTM volta a reforçar esta ideia, referindo que a resolução de problemas "deve ser central na vida escolar" (p.5). O Programa de Matemática A do Ensino Secundário afirma que uma das finalidades da Matemática é justamente desenvolver as capacidades de formular e resolver problemas (ME, 2001).

Além de poder aumentar o interesse dos alunos pela disciplina, a resolução de problemas trás inúmeros benefícios para a compreensão dos próprios conteúdos matemáticos (Ponte & Serrazina, 2000). A resolução de problemas, principalmente contextualizados, poderá ser fundamental para a aprendizagem dos alunos, em especial no caso dos conceitos mais abstratos que se podem tornar assim mais reais.

O conceito de derivada é justamente um dos mais abstratos do Ensino Secundário. Este conceito é um dos temas fundamentais no estudo da Análise Matemática (Domingos, 2003), sendo pré-requisito de todas as disciplinas científicas que utilizam a Matemática como ferramenta (Almeida & Viseu, 2002). Deste modo, além de o conceito ser, só por si, de extrema importância, as suas aplicações tornam praticamente impossível encarar a Matemática de nível superior sem conhecimentos sólidos no âmbito das derivadas. Em particular, salienta-se a sua importância no estudo de funções e resolução de problemas do dia-a-dia que envolvam a necessidade de maximizar/minimizar situações modeladas por uma função (ME 1997).

Tendo em conta a organização do Mestrado em Ensino da Matemática, é de toda a conveniência realizar a intervenção letiva no 2.º Período. Uma vez que o Programa de Matemática A do Ensino Secundário está dividido em três temas que, de forma mais ou menos rígida, devem corresponder a cada um dos períodos letivos, sabia previamente que iria lecionar uma unidade do tema "Introdução ao Cálculo Diferencial I". Esta foi uma feliz coincidência pois os temas relacionados com a Análise sempre foram a minha preferência enquanto aluna. Ao longo da escolaridade sempre foi para mim muito entusiasmante o estudo das funções e o cálculo de limites, pelo que não poderia ter ficado mais satisfeita com a unidade que lecionei. Em particular, o facto de a noção de derivada nos permitir um estudo mais aprofundado das funções e ter aplicações na vida real tornavam as unidades relacionadas com derivadas extremamente estimulantes para mim, pelo que poder, na minha primeira experiência de ensino, lecionar a unidade "Taxa de Variação e Derivada" foi extremamente motivador. Além desta preferência pessoal, sei que as noções de função e derivada são as fundações da Análise Matemática, teoria central no desenvolvimento da Matemática na era moderna (Ponte, 1992), pelo que senti uma responsabilidade acrescida mas ao mesmo tempo uma vontade, ainda maior, de gerir a unidade de forma a permitir aos alunos realizar aprendizagens significativas e ao mesmo tempo se sentirem entusiasmados com a temática.

Apesar de ter uma grande afinidade com os temas relacionados com derivadas, sei que estes são muitas vezes difíceis de assimilar pelos alunos, principalmente pela abstração envolvida no conceito. Assim, e uma vez que os alunos em geral, e estes em particular, questionam a aplicabilidade prática da Matemática, optei por dar bastante importância aos problemas de otimização ao longo da unidade. Além de sempre me ter sentido muito estimulada pela resolução de problemas na minha escolaridade, pude constatar, especialmente no Ensino Secundário, que mesmo os meus colegas com mais dificuldades pareciam ganhar uma motivação extra sempre que as aulas decorriam em torno desta atividade. Desta forma, e por todos os motivos já referidos acima, acredito que a resolução de problemas deve ser uma prática central no ensino-aprendizagem da Matemática, pelo que fiz questão de lhe dar destaque na unidade de ensino que lecionei e na investigação que realizei.

1.2. Objetivo e questões de investigação

O estudo que apresento tem como principal objetivo compreender como alunos do 11.º ano de escolaridade resolvem problemas de otimização no contexto do tema derivada de uma função. Tendo em conta o objetivo e de modo a orientar o estudo, formulei as seguintes questões de investigação:

- Que estratégias utilizam os alunos na resolução de problemas de otimização?

- Que conhecimentos sobre a derivada de uma função evidenciam os alunos ao resolverem este tipo de problemas?
- Que dificuldades manifestam no processo de resolução de problemas de otimização?

Este estudo foi desenvolvido no âmbito da lecionação da unidade de ensino "Taxa de Variação e Derivada", após os alunos contactarem com a relação entre o sinal da função derivada e o sentido de variação e extremos da função original e decorreu nas últimas aulas da unidade de ensino.

1.3. Organização do relatório

Este relatório é composto por vários capítulos, desenvolvidos tendo em conta a unidade de ensino lecionada e os objetivos do estudo de cariz investigativo que realizo.

O segundo capítulo remete para o enquadramento curricular e didático onde é feita uma revisão de literatura referente às principais dificuldades no âmbito das derivadas, à resolução de problemas e à utilização de tecnologia no ensino da Matemática.

No terceiro capítulo faço uma descrição da unidade de ensino. Assim, começo por uma breve caracterização da escola e da turma. Segue-se a ancoragem da unidade, sucedida da organização da mesma. Posteriormente apresento as estratégias de ensino pelas quais optei ao longo da unidade, bem como os motivos que estiveram na base das decisões tomadas. Na seção seguinte apresento as tarefas desenvolvidas especialmente para a unidade de ensino, integrando os conteúdos matemáticos abordados nas mesmas. A penúltima seção é referente à avaliação e termino o capítulo com uma síntese reflexiva das 12 aulas que lecionei.

O quarto capítulo refere-se aos métodos e procedimentos de recolha de dados onde explicito o paradigma de investigação, os participantes no estudo, os métodos de recolha de dados e a forma como procedi à análise dos mesmos.

No quinto capítulo realizo então a análise dos dados recolhidos e o trabalho é finalizado com o sexto capítulo onde apresento as conclusões do estudo e faço uma reflexão das aprendizagens vividas ao longo do Mestrado, em particular durante a intervenção e na elaboração deste relatório.

Capítulo 2

Enquadramento Curricular e Didático

Neste capítulo farei um breve enquadramento do tema que serve de base à unidade de ensino que lecionei, nomeadamente no que se refere às principais dificuldades relacionadas com a noção de derivada. Darei também particular relevância à resolução de problemas, questão central do meu estudo. Além disso, farei referência ao uso das tecnologias em sala de aula no contexto do ensino-aprendizagem da Matemática, uma vez que se mostram extremamente úteis na aprendizagem de conceitos chave desta unidade como por exemplo, taxa de variação.

2.1. *Conceito Imagem e Conceito Definição*

A noção de taxa de variação/derivada é a chave da unidade de ensino lecionada e desempenha um papel central na Introdução ao Cálculo Diferencial I (ME, 2002). Embora muitíssimo importante, esta noção nem sempre é assimilada facilmente pelos alunos uma vez que os conceitos envolvidos são muito complexos e exigem um certo grau de abstração, o que para alunos do Ensino Secundário se revela uma grande dificuldade.

Em particular, o conceito de limite, com o qual os alunos não estão geralmente familiarizados nesta fase do seu percurso escolar, é, só por si, foco de problemas para estes. Segundo Schwarzenberger e Tall (1976) uma grande parte dos alunos que chega à universidade não tem uma clara noção de limite uma vez que a maioria destes considera o conceito como um processo de aproximação ao invés de considerar o valor limite. De modo a compreenderem noções complexas, como por exemplo taxa de variação, os alunos necessitam de "alicerces" matemáticos, nomeadamente o conceito de limite. No entanto, estudos desenvolvidos por Tall (1992) comprovam ser bastante difícil para os estudantes usar este conceito como base do seu pensamento, o que poderá implicar ainda mais dificuldades na aprendizagem do conceito de derivada.

Estudos de Orton (1983) comprovam também que os estudantes podem apresentar um domínio razoável dos algoritmos necessários para o cálculo de derivadas simples mas evidenciam dificuldades na conceptualização geométrica de limite. Orton (1983) tal como Repo (1996) e Zandieh (2000) (citados em Markus, 2006) enfatizam nos seus estudos que apesar de os alunos, na maioria das vezes, trabalharem bem com outros aspetos do conceito de derivada, os processos envolvendo limites são muito difíceis de assimilar. Apesar disso, segundo Tall (1992) é justamente por envolver processos com limites que o conceito de derivada é uma noção central na Matemática do Ensino Secundário e um ponto de viragem para a Análise.

Apontando para as orientações curriculares, o Programa de Matemática A do Ensino Secundário, defende que é importante que o professor proporcione experiências de aprendizagem positivas para os alunos, sendo para tal essencial que as noções de taxa de variação e derivada sejam introduzidas recorrendo a um uso informal da noção de limite (ME, 2002).

Embora o conceito de limite tenha um grande peso na aprendizagem das derivadas, não é só neste que os alunos mostram dificuldades, sendo que, de uma forma geral, tendem a confundir as noções de declive, inclinação, rapidez e taxa de variação, o que acaba por resultar em erros na resolução de alguns problemas (Teuchers & Reyes, 2010). Assim, a aprendizagem do conceito de derivada é um processo bastante complexo não só devido à sua abstração mas também em relação aos processos envolvidos na sua representação que acabam muitas vezes por dificultar a compreensão deste conceito.

Na origem destas dificuldades pode estar o facto de muitos alunos resumirem o conceito de derivada às operações com derivadas (Orhun, 2012) pelo que o professor deve evitar focar as suas práticas pedagógicas apenas na mecanização de procedimentos analíticos, privilegiando a construção de significados por parte dos alunos. Aliás, segundo Aspinwall et al. (1997) os professores podem ter uma grande responsabilidade nas dificuldades que os alunos evidenciam no âmbito das derivadas, uma vez que eles próprios parecem não enfatizar a dimensão gráfica, privilegiando as abordagens analíticas, que só por si, não desenvolvem a capacidade de analisar gráficos, nem a compreensão de conceitos, como por exemplo, o de declive e o de reta tangente. Neste sentido, e em particular no contexto das derivadas, a visualização tem um papel essencial na compreensão de relações e significados implícitos (Tall, 1989) que não pode ser substituído pelo pensamento analítico (Haciomeroglu, Aspinwall & Presmeg, 2010).

Vários estudos referidos por Almeida e Viseu (2002) apontam no sentido da importância de práticas de ensino-aprendizagem de conceitos de cálculo, como derivadas, que integrem simultaneamente abordagens gráficas e analíticas de forma a evidenciar significados e relações entre aspetos deste conceito.

Um dos grandes objetivos do ensino da Matemática é a construção de significados por parte dos alunos mas este ganha uma importância ainda maior no Cálculo Diferencial. Neste sentido, investigadores como David Tall e Shlomo Vinner desenvolveram teorias em torno da problemática da construção dos conceitos matemáticos. Assim, para estes autores, a compreensão dos conceitos matemáticos ocorre com base nas noções de *conceito imagem* e *conceito definição.*

Apesar de os dois autores colaborarem na elaboração desta teoria, têm opiniões distintas, essencialmente no que se refere ao aspeto formal da relação entre estes dois conceitos. Deste modo, para Vinner *conceito imagem* e *definição* são conceitos distintos enquanto para Tall o *conceito definição* é uma parte do *conceito imagem* global que formamos na nossa mente.

Para compreender melhor esta relação vejamos o que os investigadores definem como *conceito imagem* e *conceito definição*. Tall e Vinner (1981) definem o *conceito imagem* como "a estrutura cognitiva total associada a um certo conceito matemático na mente de um indivíduo, onde se incluem todas as imagens mentais, propriedades, processos e representações mentais relacionados com o conceito" (p.152). Dito de outra forma, o *conceito imagem* é qualquer coisa não verbal que associamos na nossa mente ao nome de determinado conceito (Domingos, 2003). Tendo em conta a designação *conceito imagem*, parece-nos bastante óbvio pensar numa representação visual mas não é apenas disso que se trata e no caso de um conceito não ter uma representação visual, o *conceito imagem* não é mais do que uma coleção de impressões e experiências (Vinner, 1991). Assim, o termo *conceito imagem* é usado para descrever a estrutura cognitiva total associada a um conceito e que inclui todas as imagens mentais, isto é, todas as imagens associadas com um conceito na mente de um indivíduo (Vinner, 1983), bem como todas as propriedades e processos associados a esse conceito (Domingos, 2003).

O *conceito imagem* não é fixo, sendo construído ao longo do tempo, mudando consoante experiências vividas pelo indivíduo. De notar que, diferentes experiências podem ativar diferentes partes do *conceito imagem*, pelo que Tall e Vinner (1981) definiram como *conceito imagem evocada* estas porções do *conceito imagem* ativadas em determinado momento.

Relativamente ao *conceito definição,* Vinner (1983) refere que este termo é a definição verbal que explica o conceito de modo exato e não de uma forma circular. De forma semelhante Vinner e Tall (1981) já haviam definido *conceito definição* como "a forma verbal a que um indivíduo recorre para explicar um dado conceito (p.152). Esta visão do *conceito definição* parece ter por base a abordagem dos conceitos matemáticos para os quais é possível apresentar uma definição matemática formal, nomeadamente os conceitos abordados no Ensino Secundário e Superior (Domingos, 2003). No entanto, é necessário ter em atenção que o conhecimento da definição não nos garante a compreensão do conceito, sendo que para tal precisamos de ter um *conceito imagem* (Vinner, 1991).

Apesar disso, a importância do *conceito definição* não pode ser desconsiderada, uma vez que em muitos casos os conceitos podem ser introduzidos a partir do *conceito definição*, ajudando este na formação do *conceito imagem*. Assim, para Vinner (1991), o *conceito definição* serve de suporte para a construção do *conceito imagem* mas a partir do momento em que este é formado, o *conceito definição* torna-se prescindível, podendo permanecer inativo ou mesmo ser esquecido.

Tal como já referi, para Vinner *conceito imagem* e *conceito definição* são duas células distintas na estrutura cognitiva, enquanto para Tall o *conceito definição* é apenas uma parcela do *conceito imagem* total que existe na nossa mente (Domingos, 2003). Deste modo, para Tall o *conceito definição* é a forma como as palavras são usadas para especificar o conceito, tal como este e Vinner sugerem num texto datado de 1981, sendo que o *conceito imagem* descreve na totalidade a estrutura cognitiva associada a um conceito.

Apesar de os autores discordarem um pouco na relação entre *conceito imagem* e *conceito definição* ambos concordam que é possível encontrar partes do *conceito imagem* que entram em conflito com o *conceito definição* e vice-versa. Estes conflitos podem ou não ser conscientes para o indivíduo, mas em qualquer dos casos tornam-se fatores problemáticos para lidar com conceitos mais formais, como por exemplo os abordados no Ensino Secundário. Tall e Vinner (1981) designam a parte do *conceito imagem* ou *conceito definição* que pode entrar em conflito com a outra como *factor de conflito potencial*. De modo a não causar conflitos cognitivos reais e persistentes estes fatores não devem ser evocados, mas se tal ocorrer os factores daí resultantes são designados *fatores de conflito cognitivo.*

Remetendo agora para o conceito central da unidade de ensino que lecionei, o conceito de derivada, fica bastante explícita a importância de os alunos construírem um *conceito imagem* sólido e sem conflitos com a definição formal, uma vez que só desta forma poderão compreender o conceito de uma forma positiva. Neste sentido, segundo estudos desenvolvidos por Tall (1989) e Vinner (1983) (citado em Giraldo, Carvalho &

Tall, 2003), os alunos mostram dificuldades na abordagem geométrica ao conceito de derivada uma vez que não têm um *conceito imagem* da noção de tangencia sólido. Assim, estes autores referem que o *conceito imagem* que os alunos possuem em relação à noção de tangência está essencialmente associado a problemas no âmbito da geometria, como a reta que toca na curva em apenas um ponto, tal como no caso da tangente a uma circunferência. Esta ideia de reta tangente, oposta à de reta secante que "corta" a curva em dois pontos, acaba por levar a um estreitamento do *conceito imagem* de tangente que não é consistente com a noção de tangência no Cálculo Infinitesimal (Giraldo, Carvalho & Tall, 2003).

Tal como neste caso, problemas no desenvolvimento do *conceito imagem* relativo a um conceito podem prejudicar as aprendizagens dos alunos e impedir a compreensão do próprio conceito e de outros subjacentes. Deste modo, é essencial que o professor tenha em atenção, especialmente no contexto das derivadas, práticas pedagógicas que promovam *conceitos imagem* sólidos e além disso consistentes com o *conceito definição,* uma vez que para Vinner o processo de formação dos conceitos matemáticos assenta numa ação de reciprocidade entre o *conceito definição* e o *conceito imagem* (Domingos, 2003).

2.2. Resolução de Problemas

A importância da resolução de problemas na aprendizagem matemática é há muito defendida por vários autores. Pólya (1967), uma das grandes referências nesta área, afirmava que a resolução de problemas é a espinha dorsal do ensino no nível secundário. Wilson, Fernandez e Hadaway (1993) referem que um dos principais objetivos do ensino-aprendizagem da Matemática é desenvolver a habilidade de resolver uma variedade de problemas matemáticos complexos. Halmos (1980) (citado em Pinto, Viseu, Cunha & Martins, 2014) vai ainda mais longe afirmando que a resolução de problemas é o "coração" da Matemática. O NCTM (2008) afirma que um dos maiores objetivos da educação matemática é munir os estudantes de conhecimentos e ferramentas que lhes permitam abordar qualquer tipo de problema. Além disso, reafirma a importância da resolução de problemas, referindo que "a maioria dos conceitos matemáticos ou das generalizações pode ser introduzida efetivamente utilizando uma situação de problema" (p.395).

A literatura mostra que a resolução de problemas tem sido uma componente importantíssima do currículo matemático escolar ao longo de muito tempo, pelo menos 150 anos (D'Ambrosio, 2003). Mayer (1985) afirma que a aprendizagem da Matemática escolar tem sido largamente reconhecida como uma oportunidade para os estudantes aprenderem sobre resolução de problemas. Assim, devido a este lugar de destaque, muitos são os que têm feito reflexões sobre o tema, sendo que algumas pessoas com conhecimentos na área da Matemática são bastante entusiastas desta prática afirmando que resolução de problemas e Matemática são sinónimos. Por outro lado, quem não está entrosado com a Matemática pode descrever qualquer atividade matemática como resolução de problemas (Wilson, Fernandez & Hadaway, 1993), o que não é, de todo, correto. Assim, é necessário esclarecer o que se considera resolução de problemas.

Definir resolução de problemas não é uma tarefa fácil, uma vez que existem variadíssimas concepções, no entanto, a maioria dos autores parece concordar que o primeiro passo é definir "problema". Esta também não é uma definição fácil, uma vez que pode ser subjetiva. Assim, a mesma tarefa pode ser problemática para alguns estudantes exigindo bastante esforço, enquanto para outros apenas se trata de um exercício de aplicação (Schoenfeld, 1985). Analogamente, Ponte e Sousa (2010) referem que uma questão constituirá um problema ou um exercício para um indivíduo conforme ele disponha, ou não, de um processo que lhe permita responder rapidamente a essa questão. Dependendo dos autores, as definições são diversas mas todos acabam por ter em comum a ideia que um problema é uma questão ou tarefa que nos interessa responder ou realizar não dispondo previamente de uma estratégia de resolução.

A noção de desafio está também presente em grande parte das definições de problema. Por exemplo, Schoenfeld (1985) refere um problema como uma meta que um indivíduo tem de atingir sem no entanto ter acesso imediato ao método para o fazer. Além deste autor, o NCTM (1991) afirma que

> um problema genuíno é uma situação em que, para o indivíduo ou para o grupo em questão, uma ou mais soluções ainda precisam de ser encontradas. A situação deve ser suficientemente complicada para constituir um desafio, mas não tão complexa que surja como insolúvel. (pg.11).

Fazendo a conexão entre problema e resolução de problemas, Mayer (1985) declara que um problema ocorre quando somos confrontados com uma situação dada (situação inicial) e queremos chegar a outra situação (situação final), sem no entanto conhecer o caminho óbvio para o conseguir. A resolução de problemas será então o processo para chegar de uma situação à outra. De forma semelhante, Hayes (1981) (citado em Mayer, 1985) define resolução de problemas como "encontrar uma forma apropriada de atravessar um fosso" (p.124). Pólya (1980) refere ainda que resolver um problema é encontrar um caminho desconhecido para um alcançar um objetivo concreto.

Como se pode perceber, nenhuma destas definições aponta para a existência de um caminho explícito para a resolução de problemas. Segundo Mayer (1985), a busca por este caminho é fundamental nesta atividade, uma vez que para o autor as duas partes centrais da resolução de problemas são justamente "(1) representar o problema e (2) procurar meios para o resolver" (p.124). Ao depararmo-nos com um problema é então necessário pensar sobre a forma como o vamos resolver e encontrar um método adequado para o fazer, passando esse método a ser considerado uma estratégia (Schoenfeld, 1985). Este processo não é linear e existem diversos fatores a ter em conta na elaboração de uma estratégia. Segundo vários estudos referidos por Heirdsfield e Cooper (2004) (citados em Proulx, 2013), as decisões sobre as estratégias a utilizar são fortemente influenciadas pelo próprio problema e os seus atributos (números, variáveis didáticas, a estrutura do problema, etc.). Assim, para Threfall (2002), as estratégias podem ser tão variadas quanto os próprios problemas em si. Embora Schoenfeld (1985) ou Pólya (1957/2004), entre outros, considerem a existência de uma série de estratégias previamente conhecidas a que o indivíduo recorre ao deparar-se com um problema, para Threfall (2002) a estratégia irá emergir, tendo em conta os próprios atributos do indivíduo, como conhecimentos e preferências e a forma como este encara o problema. Deste modo, a estratégia, ao invés de escolhida, será gerada/produzida no ato da resolução. No entanto, o autor não desconsidera a importância da experiência, sendo que, apesar de cada método de resolução ser pensado especificamente para um problema e para o seu contexto, o individuo socorrer-se-á de experiências anteriores.

Para a emergência das várias estratégias tornam-se também essenciais os recursos, isto é, "a fundação sobre a qual a atividade de resolução de problemas é construída" (Schoenfeld, 1985, p.46). Schoenfeld (1989), tal como Pólya (1957/2004) e Geiger e Galbraith (1998) (citados em Carlson & Bloom, 2005) descrevem recursos como o conhecimento formal e informal sobre determinado conteúdo, incluindo factos, definições, algoritmos, procedimentos rotineiros e competências relevantes sobre regras de descoberta. Embora em muitos casos os alunos possuam os recursos necessários para resolver determinado problema, vários estudos revelam que frequentemente estes não lhes acedem no contexto de resolução de problemas (Carlson & Bloom, 2005). Segundo

Schoenfeld (1985, 1992) a utilidade destes recursos na resolução de problemas depende do controlo do indivíduo, ou seja, das decisões que este toma sobre os recursos que utiliza e quando os utiliza, sendo que para este autor o importante não é o que sabe mas como, quando e se se utilizam esses conhecimentos (Schoenfeld, 1992).

Fica assim bastante clara a centralidade das estratégias na resolução de problemas e a complexidade envolvida na elaboração das mesmas. Aliás, para Shaughnessy (1985) usar estratégias adequadas e ter a noção de quando se devem ou não aplicar são condições necessárias e essenciais para resolver problemas com sucesso.

Embora possam ser consideradas a verdadeira essência da resolução de problemas, as estratégias raramente são discutidas em sala de aula (Musser & Shaughnessy, 1980) o que acaba por condicionar a aprendizagem dos alunos. Assim, os autores acreditam que ao dar um papel de maior destaque às estratégias de resolução de problemas no currículo da Matemática, as gerações futuras estariam melhor preparadas para enfrentar os problemas com que se depararão ao longo da vida.

Muitas vezes as estratégias de resolução de problemas são também designadas heurísticas ou estratégias heurísticas. O estudo das heurísticas é por muitos desconhecido e estava bastante esquecido, no entanto, Pólya procurou, na sua obra *How to Solve It* (1957/2004), reavivá-lo numa forma moderna e modesta oferecendo o que pode ser considerado um guia simples e útil para a resolução de problemas (Schoenfeld, 1985). De acordo com o próprio matemático húngaro, heurística é o nome dado a um certo ramo do estudo ligado a várias áreas como a lógica ou psicologia, ao qual geralmente não se dá muita relevância e cujo objetivo é estudar os métodos da descoberta e da invenção (Pólya, 1957/2004). Schoenfeld (1985) acrescenta que “as estratégias heurísticas são regras de ouro para resolver problemas com sucesso, sugestões gerais que ajudam um indivíduo a perceber melhor o problema ou a fazer progressos de modo a atingir a solução” (p.23). No mesmo livro o autor refere-se a estratégia como “a forma ideal de resolver problemas ou o comportamento sistemático dos indivíduos que resolvem problemas de forma eficaz” (Schoenfeld, 1985, p.107), o que mostra claramente que para o autor as noções de estratégia e heurística são, por vezes, sinónimas.

Referindo-se à importância do conhecimento de várias heurísticas na aprendizagem, o NCTM (2008) demonstra também utilizar as duas terminologias (estratégias ou heurísticas) indiferentemente. Assim, afirma que os alunos (especialmente do 9.º ao 12.º ano) “deverão ter boas oportunidades para desenvolver um repertório vasto de estratégias de resoluções de problemas (ou heurísticas) ” (p.395). Além do NCTM, as próprias orientações curriculares nacionais enfatizam a importância de os alunos se aperceberem da necessidade de um plano e de compreenderem que o conhecimento destas heurísticas vai permitir melhorar as suas resoluções, sem que abandonem a criação dos seus próprios estilos de organização e a experiência já existente (ME, 2001).

Tal como se pode perceber, alguns autores não fazem distinção entre estratégias e heurísticas, no entanto, existem outros que deixam esta divisão bem explícita nas suas obras. Por exemplo, Carlson e Bloom (2005) referem-se a estratégias como os métodos utilizados ao resolver um problema enquanto as heurísticas remetem mais especificamente para processos e abordagens. Pólya (1957/2004) define como heurísticas as "operações mentais tipicamente úteis para resolver problemas" (p.2). Para este autor, as heurísticas incluem explorar analogias, introduzir elementos auxiliares num problema ou trabalhar um problema auxiliar mais simples, argumentar por contradição, trabalhar "do fim para o início", decompor e recombinar, explorar problemas semelhantes, desenhar figuras, generalizar, reduzir ao absurdo, variar o problema, entre outras. Como se pode perceber, estas heurísticas são bastante gerais e cabe ao indivíduo perceber quais as que mais se adequam em determinada situação, podendo recorrer a mais do que uma em cada problema e sendo a mesma heurística útil em problemas de carácter muito diversificado.

Por outro lado, as estratégias podem ser encaradas de uma forma mais específica, relacionando-se fortemente, tal como já foi referido, com as características do próprio problema. A título de exemplo Huntley et al. (2007), num estudo realizado no Ensino Secundário relacionado com equações lineares particularizam as estratégias, tendo em conta os conteúdos matemáticos. Assim, estes autores consideraram como estratégias: manipulação simbólica, manipulação simbólica e verificação por substituição, manipulação simbólica e raciocínio gráfico sem recorrer à calculadora, manipulação simbólica e utilização da calculadora gráfica, entre outras. Fica então claro que para estes autores as estratégias não são heurísticas (na definição de Pólya), mas sim os métodos práticos utilizados pelos alunos para resolver determinado problema.

Embora a importância do conhecimento das várias heurísticas não seja nunca posta em causa, alguns autores como Geiger e Galbraith (1998) (citados em Carlson & Bloom, 2005) referem que os indivíduos que resolvem problemas de forma eficaz exibem uma grande flexibilidade durante a sua resolução e tendem a recorrer a estratégias relacionadas com os conteúdos matemáticos envolvidos no problema e não apenas a heurísticas gerais. Neste sentido, e indo ao encontro do que foi feito, por exemplo, por

Huntley et al. (2007), no presente estudo, tendo em conta a problemática que defini e em particular a primeira questão de investigação, assumo como estratégias de resolução os métodos através dos quais os alunos resolveram um problema, considerando obviamente a utilização dos recursos.

Independentemente da estratégia utilizada existem etapas que são comuns à resolução de problemas em geral e vários autores como Wallas (1926) ou Lester (1978) desenvolveram modelos próprios para esta atividade. Embora todos tenham sido muitíssimo importantes, as contribuições de Pólya (1957/2004) assumiram particular destaque ao longo dos anos. Este autor desenvolveu um modelo, constituído por quatro fases, com o objetivo de facilitar a resolução de problemas e permitir aos alunos uma maior organização nesta prática, sendo estas: compreensão do problema, estabelecimento de um plano, execução do plano e análise retrospetiva. Inicialmente é necessário entender o problema, ou seja compreender claramente o que é pedido no enunciado. Seguidamente deve estabelecer-se um plano, relacionando os dados do problema e a sua questão principal e procurando uma estratégia que permita resolvê-lo. Nesta fase é necessário pensar se já resolvemos um problema semelhante, se podemos resolver o problema em várias fases, que conhecimentos se podem aplicar, que tipo de representação é mais conveniente, entre outros fatores que permitam organizar o pensamento e consequentemente a resolução. Na terceira etapa, tal como o nome indica, executa-se o plano construindo efetivamente as várias representações, efetuando cálculos, expondo os raciocínios, ou seja, em resumo, pondo em prática o que se planeou anteriormente. Finalmente é preciso verificar se o plano foi bem executado, se pode ser ajustado, se é possível encontrar uma outra forma de resolver o problema mais eficazmente e se a solução encontrada está ou não de acordo com o pretendido. Obviamente estas fases não existem isoladamente, estando sempre conectadas entre si.

Assim, cabe então ao professor promover atividades de resolução de problemas nas suas aulas que deem aos alunos a oportunidade de contactar com estas fases e de praticar uma grande variedade de heurísticas mas ao mesmo tempo que permitam aprender conteúdos importantes através da sua exploração (NCTM, 2008). Como “a resolução de problemas, com sucesso, exige o conhecimento de conteúdos matemáticos, de estratégias de resolução de problemas, a capacidade de autorregulação, e uma predisposição para a colocação e resolução de problemas” (NCTM, 2008, p.402) as aulas tornam-se ainda mais complexas de preparar, uma vez que não se trata apenas de promover conhecimento matemático mas também uma série de atitudes no âmbito da resolução de problemas. Além disso, as próprias aulas podem tornar-se imprevisíveis para o professor pois os alunos podem apresentar soluções e estratégias sobre as quais este nunca pensou (NCTM, 2008). No entanto, este não pode ser um fator desmotivante para os professores, pelo contrário. O grande objetivo do ensino através da resolução de problemas é possibilitar aos alunos que pensem por si e é desta forma que se atinge uma das principais finalidades do ensino em geral, isto é, que os estudantes "pensem pelas suas cabeças" (Lester, Jr., 1985).

Os benefícios para a aprendizagem dos conteúdos matemáticos contemplados em determinado problema estão também bastante claros na literatura. Assim, Grouws (2003) afirma que as decisões que um professor toma no planeamento e implementação de uma metodologia baseada em resolução de problemas no ensino da Matemática tem um profundo impacto na aquisição de conhecimentos e competências matemáticas. Ponte e Serrazina (2000) enfatizam a importância desta prática ao longo de todo o ensino referindo que "a resolução de problemas ajuda a desenvolver a compreensão das ideias matemáticas e a consolidar as capacidades já aprendidas e, por outro lado, constitui um importante meio de desenvolver novas ideias matemáticas" (p.55 e 56). Estes autores afirmam ainda que a resolução de problemas pode constituir o ponto de partida e o ponto de chegada do ensino-aprendizagem da Matemática.

Kahan e Wyberg (2003) referem três das principais razões pelas quais se deve ensinar Matemática através da resolução de problemas: (1) ajuda os estudantes a aprender Matemática por um processo com sentido, (2) aprofunda a compreensão dos alunos sobre as ideias e métodos matemáticos subjacentes e (3) capta o interesse dos alunos.

O último ponto acima descrito remete para outro dos grandes benefícios da resolução de problemas no âmbito da Matemática, a sua aplicabilidade. Deste modo, Boavida et al. (2008) referem que a resolução de problemas permite estabelecer conexões entre os vários temas matemáticos e entre a Matemática e outras áreas curriculares e apresenta-a como uma disciplina útil na vida quotidiana. O próprio Programa de Matemática A do Ensino Secundário reforça esta ideia, declarando que o conhecimento das heurísticas e organizações de pensamento subjacentes à resolução de problemas são úteis em todos os aspetos da vida e não só da Matemática (ME, 2001).

Remetendo para o contexto da unidade de ensino que lecionei, os problemas de otimização são uma excelente forma de fazer esta ponte entre os conceitos matemáticos e a sua aplicabilidade na vida prática. No entanto, é importante realçar que alguns estudos revelam que os alunos têm tendência a aplicar de forma errada os seus conhecimentos de

Cálculo na resolução de problemas (Selden, Mason, & Selden, 1989; Selden, Selden, & Mason, 1994, citados em Swanagan, 2012). Na origem desta situação pode estar o facto de os estudantes se focarem na aprendizagem dos procedimentos e não na compreensão do seu significado e na forma como estes podem ser aplicados (Swanagan, 2012). Assim, é mais uma vez essencial que o professor não remeta as aprendizagens de conceitos matemáticos para uma mecanização de procedimentos e que no contexto de resolução de problemas enfatize o significado dos conceitos matemáticos que estão a ser utilizados.

2.3. O recurso à tecnologia no ensino-aprendizagem da Matemática

Segundo o Programa de Matemática A do Ensino Secundário, a dimensão gráfica constitui uma componente incontornável do trabalho matemático, pelo que o uso de tecnologia adequada (calculadora gráfica ou computador) é essencial para o percurso escolar dos alunos. Além de prepará-los para utilizar a Matemática na sociedade atual, cada vez mais tecnológica, o recurso à tecnologia pode auxiliar os estudantes na compressão de conceitos matemáticos (ME, 2001). Do mesmo modo, o NCTM (2008) enfatiza os benefícios da tecnologia, afirmando que, quando são disponibilizadas ferramentas tecnológicas, os alunos podem concentrar-se nas decisões a tomar, no raciocínio e na resolução de problemas.

O Princípio da Tecnologia enunciado pelo NCTM (2008) afirma também que a tecnologia pode ser utilizada nos vários anos de escolaridade e em qualquer área da Matemática, pelo que os professores devem recorrer a estas ferramentas sempre que possível e adequado. Nesta linha, penso que os recursos tecnológicos têm uma importância crucial no desenvolvimento da unidade "Taxa de Variação e Derivada", uma vez que a mesma envolve conceitos bastante complexos e abstratos. Tal como já referi anteriormente, o conceito de limite, essencial para a compreensão da noção de taxa de variação, é comprovadamente um conceito de difícil aprendizagem, com o qual os alunos não se sentem à vontade (Cornu, 1991; Tall, 1992, 1994). Um dos fatores que torna este conceito particularmente difícil é a necessidade de abstração, no entanto, a tecnologia pode ser um grande auxílio nesta fase uma vez que pode fomentar o envolvimento dos alunos com ideias matemáticas abstratas (NCTM, 2008).

O computador, em particular, deve ser um recurso a ter em conta pelo professor nestes casos pois pode dar um muito necessário significado a conceitos matemáticos que os alunos sentem que não existem no mundo físico, mas apenas na mente ou num mundo imaginário (Dubinsky & Tall, 1991), como o conceito de limite, e consequentemente de taxa de variação. A verdade é que muitas vezes os alunos sentem que a Matemática, ou pelo menos certas áreas, não existe "na vida real" o que acaba por dificultar a compreensão de conceitos, especialmente os relacionados com o Cálculo Infinitesimal e a Análise. Segundo autores como Cornu (1991), estas áreas exigem um pensamento matemático avançado e a verdade é que, tal como a generalidade dos professores reconhece, nem todos os alunos conseguem fazer a passagem para este tipo de Matemática. Mais uma vez, a tecnologia pode permitir combater estas lacunas dado que certas ideias são mais fáceis de entender quando são mais "concretas" e menos "abstratas" e ao implementarmos ou representarmos uma noção abstrata num computador, esta passa a ser concreta na mente, pelo menos no sentido de que "existe" (Dubinsky & Tall, 1991).

Além de permitir aos alunos um contacto mais real com a Matemática, a tecnologia pode permitir, através das capacidades de cálculo, executar procedimentos rotineiros de forma rápida e precisa, deixando mais tempo para o desenvolvimento de conceitos e a modelação (NCTM, 2008). Uma vez que o Programa é bastante extenso é necessário, em alguns momentos, acelerar o ritmo de trabalho, sem no entanto, condicionar as aprendizagens dos alunos. Estas aprendizagens só poderão ser significativas se os alunos tiverem oportunidade de explorar os conceitos em questão, pelo que as tecnologias se tornam essenciais, permitindo acelerar os procedimentos secundários "ganhando" tempo para o que é realmente importante. Assim, uma vez que na abordagem de conceitos como taxa média de variação e taxa de variação é necessário proceder a vários cálculos, o uso de uma ferramenta tecnológica, que permita realizá-los rapidamente e de uma forma correta, é essencial.

Ao referir "tecnologia" penso que é bastante imediato pensar em computadores e *software* desenvolvidos para a aplicação nas aulas de Matemática, no entanto, é muitíssimo importante não relegar a calculadora gráfica para segundo plano. Esta ferramenta, obrigatória no atual Ensino Secundário, não deve ser utilizada apenas para efetuar cálculos, uma vez que é um meio incentivador do espírito de pesquisa e pode contribuir positivamente para uma melhoria do ensino da Matemática (ME, 2001).

Se a calculadora gráfica se mostra um recurso essencial ao longo de todo o Ensino Secundário, não posso deixar de referir que adquire ainda mais importância no tema das funções, uma vez que, por exemplo, permite ao aluno efetuar rapidamente a conversão entre as três representações de função: algébrica, gráfica e numérica (Consciência &

Oliveira, 2011). Além disso, proporciona aos estudantes oportunidade para explorar funções de diferentes modos antes de terem conhecimentos matemáticos suficientes para efetuar o estudo analítico, fornecendo-lhes assim um conhecimento intuitivo que servirá de base para uma compreensão mais formal (Consciência, 2013). De forma semelhante ao que foi referido para os computadores, a calculadora gráfica é também essencial para promover a "visualização" de ideias mais abstratas, uma vez que ao permitir trabalhar com várias representações das funções pode proporcionar aos alunos oportunidades para desenvolver uma visão orientada para o objeto, essencial para o desenvolvimento do conceito (Consciência, 2013).

Particularizando mais uma vez para a unidade "Taxa de Variação e Derivada" a calculadora gráfica mostra-se um recurso muito facilitador para a aprendizagem do conceito de derivada, uma vez que permite aos alunos desenvolver fortes relações entre a forma gráfica e simbólica do mesmo (Roorda, 2014).

A calculadora gráfica, e a tecnologia em geral, têm também um papel muito importante na resolução de problemas, tema central do meu estudo, uma vez que podem ajudar alunos e professores a apresentar, comparar e refletir sobre os problemas e as suas soluções, desde que usadas de acordo com os objetivos matemáticos (Zbiek, 2003).

Apesar de todos estes benefícios, tanto a calculadora gráfica como o computador e respetivo *software* devem ser usados responsável e criteriosamente, uma vez que sendo máquinas têm limitações que importa ter em conta (Consciência, 2003). Assim, é necessário que o professor perceba que o sucesso das aulas com recurso à tecnologia depende em muito da forma como este as gere, uma vez que como qualquer ferramenta de ensino pode ser usada de forma adequada ou ineficaz (NCTM, 2008). Apesar de os professores considerarem, por exemplo, os *software* gráficos muito acessíveis, não podem esquecer-se de que está nas suas mãos induzir os alunos a utilizar o recurso com pressupostos matemáticos, preparar aulas estruturadas para a utilização de tecnologias e tarefas adequadas, auxiliar os estudantes no uso do recurso apresentando-lhes estratégias para melhorar o seu trabalho e suportando a interpretação matemática dos resultados (Ruthven, Deaney & Hennessy, 2009).

Deste modo, fica bastante claro que é responsabilidade do professor cuidar para que os seus alunos tenham oportunidade de recorrer a ferramentas tecnológicas que permitam melhorar o ensino da Matemática, fomentando o seu espírito de autonomia e proporcionado um suporte para que estes façam as suas próprias explorações partilhando as novas descobertas com a turma (Ruthven, Deaney & Hennessy, 2009).

No entanto é importante referir que o confronto com os resultados teóricos é necessário, uma vez que o ensino dos alunos não pode ser limitado a apenas uma vertente. A tecnologia e a teoria devem estar sempre relacionadas em sala de aula, sendo que tecnologia não deve ser utilizada como uma substituição para a compreensão e intuição elementar e sim para estimular as mesmas (NCTM, 2008).

Capítulo 3

A unidade de ensino

O estudo que realizo tem por base a minha intervenção letiva numa turma de 11.º ano de escolaridade do curso de Ciências Socioeconómicas, na Escola Secundária com 3.º Ciclo de Caneças. Esta intervenção realizou-se no último mês de aulas do 2.º Período do ano letivo de 2014/2015, mais precisamente entre 25 de fevereiro e 20 de março de 2015.

Neste capítulo apresento a unidade de ensino começando por abordar o contexto escolar, caracterizando a escola e a turma. Em seguida faço um breve enquadramento da unidade no Programa de Matemática A do Ensino Secundário e apresento a organização da mesma. Faço ainda uma descrição das estratégias de ensino e recursos adotados, bem como das tarefas que desenvolvi. Ainda neste capítulo refiro a forma como procedi à avaliação das aprendizagens dos alunos e o mesmo termina com uma síntese das aulas lecionadas.

3.1. Contexto Escolar

3.1.1. Caracterização da escola

A Escola Secundária com 3.º Ciclo de Caneças faz parte do Agrupamento de Escolas de Caneças, sendo a Sede do mesmo. O agrupamento situa-se na freguesia de Caneças, a maior, em área, do concelho de Odivelas, no distrito de Lisboa.

É constituído por cinco escolas. Destas, duas são escolas básicas de 1.º Ciclo com Jardim de Infância, uma é apenas escola básica de 1.º Ciclo e as duas restantes são, respetivamente, de 2.º e 3.º Ciclos e de 3.º Ciclo e Ensino Secundário.

Uma vez que o concelho de Odivelas se localiza na periferia de Lisboa, muitas das famílias são oriundas de outras regiões do país e também do estrangeiro, nomeadamente, do Brasil, da China, dos países da Europa de Leste e dos PALOP. De uma forma geral o nível socioeconómico do meio onde o agrupamento se insere é bastante heterogéneo, apesar de a maioria das famílias pertencer às classes baixa e média baixa. As habilitações académicas das famílias são também, na maioria, bastante baixas, o que, segundo o Projeto Educativo do Agrupamento (2009/2013), muitas vezes não contribui para um investimento na educação dos educandos.

No que respeita à Escola Secundária com 3.º Ciclo, o facto de os encarregados de educação verem frequentemente o insucesso com naturalidade, considerando as aprendizagens escolares por vezes desnecessárias, acaba por ser bastante condicionante, uma vez que pela sua idade e razões económicas, muitos alunos acabam por abandonar a Escola ingressando no mercado de trabalho (Projeto Educativo da Escola Secundária com 3.º Ciclo de Caneças (2010-2013). No entanto, embora as condições económicas não sejam as mais favoráveis, segundo o Relatório de Avaliação Externa desta escola, realizado em 2013, só beneficiam de auxílios económicos (ASE) 24,8% dos alunos do 3.º Ciclo e 35,2% do Ensino Secundário.

3.1.2. Caracterização da turma

A turma em que esta unidade de ensino foi realizada é constituída por 30 alunos, dos quais 11 são rapazes e 19 raparigas, sendo que destas, quatro frequentam apenas a disciplina de Matemática. Estas alunas cursam todas as outras disciplinas numa turma de 12.º ano, estando a repetir a disciplina de Matemática A de 11.º ano. Existem ainda cinco alunos que frequentam apenas uma ou duas disciplinas, que não a de Matemática A. Tendo em conta esta diversidade do percurso dos alunos e a informação disponível, em algumas passagens deste relatório terei necessidade de fazer referência à “turma-base”, isto é, aos 21 alunos que frequentam todas as disciplinas do 11.º ano deste curso.

A idade dos alunos, no final do presente ano letivo, variava entre os 16 e 19 anos, sendo a média de idades de aproximadamente 16,7 anos. Relativamente à “turma-base” a idade dos alunos variava apenas entre os 16 e 17 anos, existindo uma única aluna que já repetiu um ano de escolaridade mas por motivos relacionados com mudança de país.

Segundo os relatórios de final de período realizados pelo conselho de turma, os alunos inserem-se maioritariamente na classe média e média baixa, sendo que nove usufruem de ASE A e cinco de ASE B. Em relação às habilitações dos encarregados de educação, estas são bastante diversificadas, variando entre o 2.º Ciclo do Ensino Básico e a Licenciatura, tal como se pode observar na Figura 1. As profissões destes são também bastante heterogéneas, tais como por exemplo, domésticas, bancários, engenheiros, funcionários públicos, professores, entre outros.

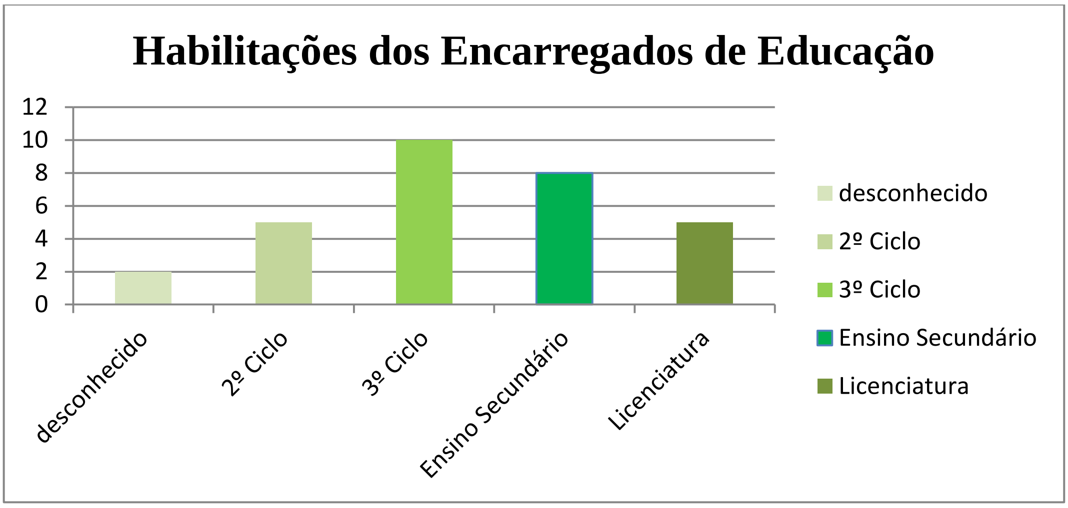


Figura 1 – Habitações dos Encarregados de Educação

Relativamente ao agregado familiar dos alunos que constituem a "turma-base", 14 vivem com ambos os pais. Dos restantes, sete vivem num agregado monoparental (apenas com a mãe) e um aluno vive uma semana em casa de cada progenitor. O agregado familiar dos alunos varia entre dois e sete elementos.

No que respeita à situação escolar, a turma é bastante heterogénea em relação ao aproveitamento e relativamente ao comportamento não existe nenhum caso negativo a registar. São alunos geralmente bem comportados, apesar de um pouco faladores, e mostram, na sua maioria, interesse pela escola, sendo bastante participativos na generalidade das disciplinas. No entanto, é da opinião de todos os professores que a maioria dos alunos conseguiria melhores resultados caso se concentrasse mais e mostrasse mais empenho nas aulas. Relativamente à assiduidade também não existe nenhum caso problemático, uma vez que a generalidade dos alunos apresenta uma assiduidade regular e as faltas estão, em grande parte, justificadas. Excetuando alguns atrasos esporádicos, os alunos são também pontuais na maioria das disciplinas.

Quando questionados acerca do interesse em prosseguir os estudos após a conclusão do Ensino Secundário, apenas um aluno da "turma-base" afirma não pretender ingressar no Ensino Superior. Dos restantes, três ainda não sabem o que pretendem fazer quando concluírem o 12.º ano e todos os outros pretendem continuar os estudos académicos.

De notar um aluno com Necessidades Educativas Especiais mas que não demonstra dificuldades significativas na disciplina de Matemática A, apenas alguns problemas de organização, sendo que os critérios de avaliação que lhes são aplicados são semelhantes aos dos da restante turma.

Relativamente às classificações no presente ano letivo, na generalidade das disciplinas as notas da turma estão em concordância com as das outras turmas de 11.º ano da escola. A maior discrepância surge na Matemática A uma vez que a classificação média da turma a esta disciplina se situou sempre mais do que 1,5 valores abaixo da média anual escolar, sendo negativa no 1.º e 2.º Períodos. Assim, no 1.º Período a média das classificações a Matemática A foi de 8,4 valores, correspondendo as classificações negativas a 68% dos alunos. A classificação mais baixa foi de seis valores, verificada em oito alunos e uma aluna teve classificação de 14 valores, a nota mais alta da turma, tal como demonstra a Figura 2.

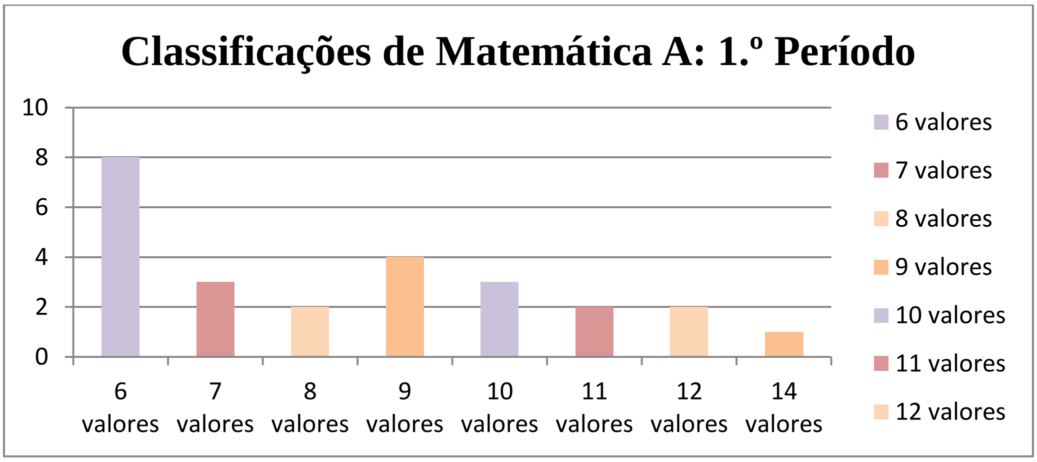


Figura 2 - Classificações da disciplina de Matemática A no 1.º Período

Apesar das baixas classificações os alunos mostraram-se, na sua maioria, empenhados e participativos nas aulas, assumindo, no entanto, sentir bastantes dificuldades na disciplina. Este empenho dos alunos acabou por ser demonstrado nas classificações do 2.º Período uma vez que, em grande parte das disciplinas, melhoraram as suas notas. No que respeita à disciplina de Matemática, a média continuou negativa, correspondendo a 9 valores. Este valor é fortemente influenciado por classificações bastante baixas, nomeadamente três e cinco valores. No entanto, ao contrário do período anterior onde a maior incidência estava nos oito valores, no 2.º Período a classificação mais frequente é de 11 valores, tal como pode ser observado na Figura 3.

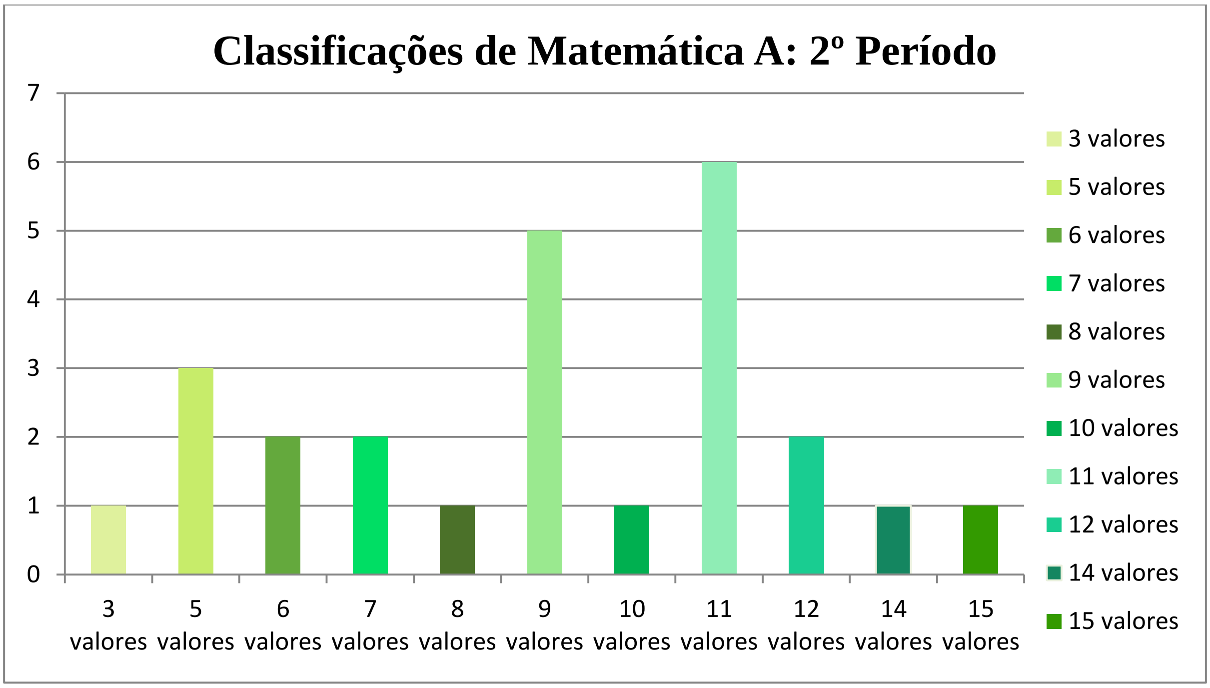


Figura 3 - Classificações da disciplina de Matemática A no 2.º Período

Comparando os dois gráficos, é possível ver que a classificação mínima desceu do 1.º para o 2.º Período. Este decréscimo resulta do facto de existir na escola a política de não dar classificações menores que seis valores no 1.º Período, sendo que a maioria dos alunos com esta classificação beneficiou desta medida. Assim, à exceção de uma aluna, todos os alunos mantiveram ou melhoraram as suas notas e desempenho ao longo do 2.º Período, subindo alguns até quatro valores na classificação. Relativamente à classificação máxima, no 2.º Período esta aumentou um valor.

A nível de percentagem, no 2.º Período a turma teve 56% de classificações negativas a Matemática A mas se considerarmos apenas a "turma-base" a percentagem de negativas desce para aproximadamente 47,6%. As alunas que apenas frequentam a disciplina de Matemática A influenciaram a média da turma, uma vez que todas tiveram classificação negativa e, em particular, uma delas teve a classificação mais baixa da turma, três valores.

Tal como já se havia registado no 2.º Período, no 3.º as classificações continuaram a melhorar, com a percentagem de negativas reduzida para 37,5%. Apesar de nem a classificação mínima nem máxima se alterarem face ao 2.º Período, o número de alunos com classificações entre dez e 15 valores subiu de 11 para 15 (Figura 4) e a moda das classificações alterou-se de 11 para 12.

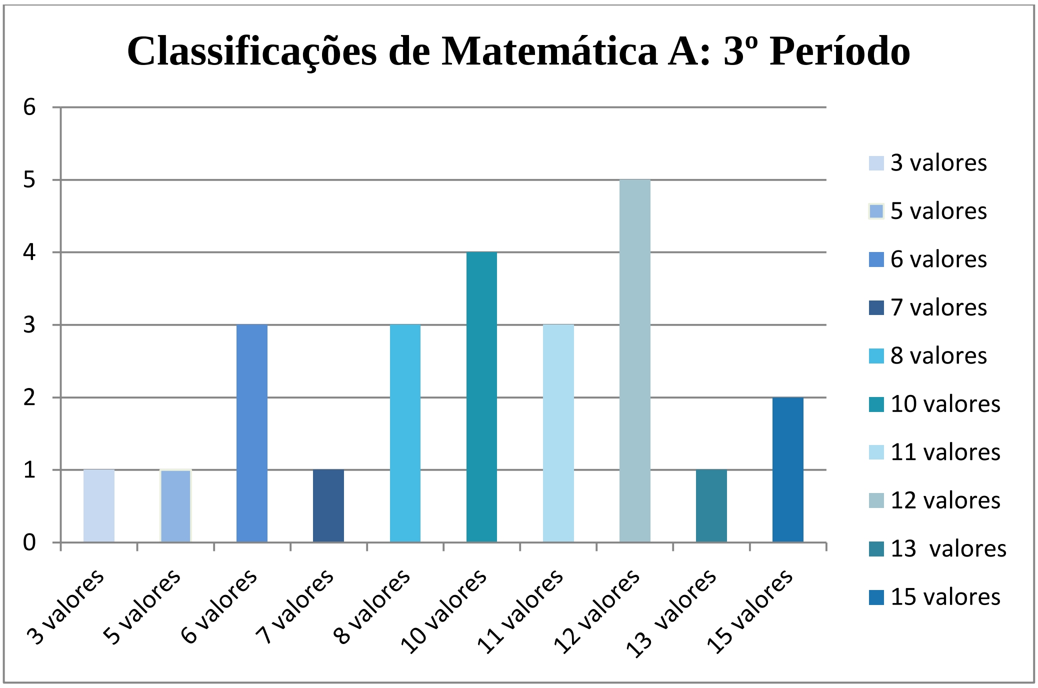


Figura 4 - Classificações da disciplina de Matemática A no 3.º Período

De notar que, dos nove alunos que tiveram classificação negativa a Matemática A, seis reprovaram efetivamente a esta disciplina enquanto os outros três transitaram para o 12.º ano na disciplina de Matemática A devido à classificação conseguida no 10.º ano.

Considerando o panorama geral, nenhum aluno ficou retido no 11.º ano de escolaridade, no entanto, no último mês do 3.º Período, uma aluna anulou várias disciplinas, inclusive Matemática A, com o intuito de repetir o 11.º para melhorar a sua média.

Na comparação com as restantes turmas de 11.º ano, a média da turma manteve-se ligeiramente abaixo da média global ao longo de todo ano letivo, embora tenha tido uma evolução positiva. Assim, no final do 1.º Período a média do 11.º ano era de 12,1 valores e a da turma de 11,9 enquanto no final do ano letivo subiu para 12,6 valores, duas décimas abaixo da média global que foi de 12,8 valores.

3.2. Ancoragem e Organização da unidade de ensino

Um dos objetivos do Programa de Matemática A do Ensino Secundário é iniciar o estudo da Análise Infinitesimal, sendo que é no 11.º ano de escolaridade que os alunos contactam pela primeira vez com o Cálculo Diferencial, que desenvolve o tema das derivadas e que constituiu um dos dois principais ramos da Análise Infinitesimal (Teixeira et al., 1998). Segundo o Programa deve recorrer-se a uma aproximação gradual dos conceitos de continuidade, derivadas e limites (ME, 2001). Tendo em conta esta aproximação gradual, Teixeira et al. (1998) sugerem que as derivadas sejam sobretudo tratadas a partir da noção de taxa de variação, privilegiando abordagens gráficas.

Assim, apesar de só no 12.º ano o estudo das derivadas ser concluído, sendo formalizados os conceitos de limite e continuidade, esta é uma unidade de importância fulcral uma vez que, segundo Tall (1992), a noção de derivada é um ponto de viragem para a Análise Matemática, pelo que o professor deve ter particular atenção às aprendizagens a realizar pelos alunos.

O presente estudo tem por base a intervenção letiva que realizei no âmbito do grande tema Funções Reais e Análise Infinitesimal. A unidade de ensino enquadra-se no segundo tema do Programa de Matemática A de 11.º ano "Introdução ao Cálculo Diferencial I". Dentro deste tema lecionei, no último mês do 2.º Período, a unidade de ensino "Taxa de Variação e Derivada". Os conteúdos principais das aulas lecionadas foram: taxa média de variação, taxa de variação, derivada de uma função num ponto, função derivada, regras de derivação e sinal da função derivada, sentido de variação e extremos relativos de uma função.

Tendo em conta os conteúdos acima mencionados esperava-se que os alunos estivessem na posse de conhecimentos sobre o estudo analítico de funções polinomiais, funções racionais e conceito intuitivo de limite.

A resolução de problemas, tema transversal do Programa de Matemática A do Ensino Secundário, foi uma das apostas fortes da unidade de ensino, especialmente na parte final, uma vez que o objetivo principal do estudo remete para a resolução de problemas de otimização.

Ao longo da unidade foi também essencial o uso da tecnologia, outro dos temas transversais do Programa de Matemática A do Ensino Secundário. Assim, além da calculadora gráfica, de uso obrigatório e cujos contributos na antevisão de conceitos do cálculo diferencial são defendidos nas orientações curriculares, os alunos contactaram com o *software* de geometria dinâmica, GeoGebra.

As aulas que lecionei foram planificadas tendo em conta os objetivos gerais do tema "Introdução ao Cálculo Diferencial I" e em particular os subtópicos da unidade em questão.

Uma vez que lecionei toda a unidade, 12 aulas de 90 minutos entre os dias 25 de fevereiro e 20 de março de 2015, antes de planificar cada uma das aulas, tive em consideração uma visão global dos conteúdos e conceitos abordados, decidindo quais os principais objetivos e escolhendo os processos adequados para os atingir (Abrantes, 1985). Assim, mais do que selecionar boas tarefas, foi essencial pensar no encadeamento das mesmas, nos recursos a utilizar e na forma como os momentos de carácter mais teórico se combinam com os de trabalho autónomo.

De uma forma individual, cada aula foi preparada de modo a dar resposta a objetivos específicos e especialmente às necessidades dos alunos, tendo em conta as suas características pessoais e dificuldades na aula de Matemática. Além disso, especialmente na parte final da unidade, as aulas foram planificadas considerando os objetivos de investigação já definidos anteriormente.

Outra das grandes preocupações no planeamento da unidade foi permitir um ajustamento das aulas, caso fosse necessário, para que os objetivos principais fossem atingidos, uma vez que, tal como sugere Abrantes (1985), o professor não deve seguir um esquema de trabalho rígido, devendo ser flexível na execução do seu plano. E de facto foram necessários alguns ajustes, especialmente nas primeiras aulas, tendo em conta a complexidade dos conteúdos envolvidos e o recurso a computadores e houve até necessidade de lecionar uma aula fora do horário da disciplina de Matemática A, por troca com outro professor.

A seguinte tabela apresenta a planificação global das aulas que lecionei.

Aula e Data	Subtópicos	Momentos de aula	Tarefas
1.ª aula 25 de fevereiro de 2015 8h15-9h45	-Noção de taxa média de variação; -Cálculo de taxa média de variação; -Interpretação geométrica de taxa média de variação.	-Resolução da Parte 1 da Tarefa; -Definição de taxa média de variação; -Discussão dos resultados da Parte 1 da Tarefa; -Sistematização da relação entre a taxa média de variação e a monotonia de uma função num intervalo; -Resolução da Parte 2 da Tarefa.	-Tarefa "Estância de Ski"
2.ª aula 27 de fevereiro de 2015 10h05-11h35	-Interpretação geométrica de taxa média de variação; -Noção de taxa de variação; -Definição de derivada; -Interpretação geométrica de taxa de variação.	-Discussão dos resultados da Tarefa "Estância de Ski" (Parte 2); -Sistematização da interpretação geométrica de taxa média de variação; -Resolução da Tarefa "Continuando na Estância de Ski" (Parte 1); -Discussão dos resultados da Tarefa (Parte 1); -Definição de taxa de variação/derivada; -Resolução da Tarefa "Continuando na Estância de Ski" (Parte 2);	- Tarefa "Estância de Ski" -Tarefa "Continuando na Estância de Ski"

		-Discussão dos resultados da Tarefa (Parte 2).	
3.ª aula 2 de março de 2015 11h50-13h20	-Noção de taxa média de variação; -Cálculo da taxa média de variação; -Noção de taxa de variação; -Definição de derivada; -Interpretação geométrica de taxa de variação.	-Discussão dos resultados da Parte 2 da Tarefa: Continuação; -Correção do trabalho de casa; -Resolução de tarefas de aplicação do manual escolar e discussão dos resultados.	-Tarefa "Continuando na Estância de Ski"
4.ª aula 2 de março de 2015 15h20-16h50	-Determinação da derivada em casos simples: função afim, funções polinomiais do 2.º e 3.º grau.	-Resolução da Tarefa; -Discussão dos resultados da Tarefa; -Definição de derivada enquanto função; -Determinação das funções derivadas das funções afim, polinomial de 2.º grau e polinomial de 3.º grau; -Resolução de tarefas de aplicação e apresentação dos resultados.	- Tarefa "Derivando ponto a ponto"
5.ª aula 4 de março de 2015 8h15-9h45	-Derivadas de algumas funções: função racional do 1.º grau.	-Determinação da função derivada da função racional de 1.º grau; -Resolução de tarefas de aplicação e apresentação dos resultados; -Esclarecimentos de dúvidas para a ficha de avaliação sumativa.	
6.ª aula 6 de março de 2015 10h05-11h35	-Geometria no Plano e No Espaço II; -Estudo intuitivo das propriedades das funções e dos seus gráficos para a seguinte classe de funções: $a+\frac{b}{cx+d}$;[1] -Noção e cálculo de taxa média de variação; -Noção de taxa de	-Resolução de uma ficha de avaliação sumativa.	- Ficha de Avaliação sumativa

[1] A ficha de avaliação sumativa teve como principal objetivo avaliar os conhecimentos dos alunos no âmbito das funções racionais, no entanto, houve lugar a questões sobre tópicos referentes ao tema Geometria no Plano e no Espaço II e duas questões foram relacionadas com os tópicos já abordados na unidade de ensino que lecionei "Taxa de Variação e Derivada"

	variação; -Definição de derivada; -Interpretação geométrica de taxa de variação.		
7.ª aula 9 de março de 2015 15h20-16h50	-Derivadas de algumas funções: função módulo.	-Resolução de algumas tarefas da Ficha de Trabalho e discussão dos resultados; -Determinação da derivada da função módulo; -Resolução da questão 8 da Ficha de Trabalho e apresentação dos resultados.	- Ficha de Trabalho n.º 1
8.ª aula 11 de março de 2015 8h15-9h45	-Constatação por argumentos geométricos de que: *i)* se a derivada é positiva num intervalo aberto a função é crescente nesse intervalo e, se a derivada é negativa num intervalo aberto a função é decrescente nesse intervalo; *ii)* se a função é derivável num intervalo aberto e se tem um extremo relativo num ponto desse intervalo então a derivada é nula nesse ponto.	-Resolução da Tarefa; -Discussão dos resultados da Tarefa; -Sistematização da relação entre o sinal da função derivada, sentido de variação e extremos da função original; -Resolução de tarefas de aplicação.	-Tarefa "Evolução das Bactérias"
9.ª aula 13 de março de 2015 10h05-11h35	(Segue os tópicos da aula anterior)	-Correção do trabalho de casa; -Resolução de algumas questões da Ficha de Trabalho.	-Ficha de Trabalho n.º 2
10.ª aula 16 de março de 2015 15h20-16h50	(Segue os tópicos da aula anterior)	-Discussão dos resultados das questões da Ficha de Trabalho n.º 2 realizadas na aula anterior; -Resolução, em grande grupo, da tarefa 3 da Ficha de Trabalho n.º 2; - Resolução da Tarefa "A População da Urbanização"	-Ficha de Trabalho n.º 2 -Tarefa "A População da Urbanização"
11.ª aula 18 de março de 2015	(Segue os tópicos da aula anterior)	-Discussão da Tarefa "A População da Urbanização"; -Resolução, em grande grupo, de uma	-Tarefa "A População da Urbanização" -Ficha de

8h15- 9h45		proposta do manual escolar; -Resolução de algumas tarefas da Ficha de Trabalho n.º 3.	Trabalho n.º 3
12.ª aula 20 de março de 2015 10h05- 11h35	(Segue os tópicos da aula anterior)	-Resolução de algumas tarefas da Ficha de Trabalho: Continuação.	-Ficha de Trabalho n.º 3

Tabela 1 - Plano geral da unidade de ensino

3.3. Estratégias de Ensino

Segundo o Programa de Matemática A do Ensino Secundário (ME, 2001) a abordagem das funções reais deve considerar sempre estudos dos diferentes pontos de vista – gráfico, numérico e algébrico. Deste modo, a unidade que lecionei contemplou várias estratégias de ensino, com tarefas de natureza diversa e metodologias de trabalho variadas. Uma vez que os professores são responsáveis pela qualidade das atividades matemáticas em que os alunos se envolvem (NCTM, 1991) tive um especial cuidado em selecionar tarefas que permitissem desenvolver a compreensão dos conceitos e processos e ao mesmo tempo estimulassem capacidades transversais. Assim, embora tanto no Programa de Matemática A do Ensino Secundário (2001) como no Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007) sejam consideradas algumas capacidades (ou temas) transversais a todos os temas, optei por, nas planificações, utilizar como linha orientadora as capacidades transversais enumeradas pelo Programa de 2007, isto é resolução de problemas, comunicação matemática e raciocínio matemático. Esta opção prende-se com a importância que estas capacidades têm para o processo ensino-aprendizagem da Matemática, em geral, e com o facto de considerar que assumem particular importância numa unidade de ensino tão delicada e com conceitos tão complexos como a que lecionei.

Tendo em conta a ideia, cada vez mais forte, de que aprender Matemática é sobretudo fazer matemática (NCTM, 2008) procurei sempre que os alunos tivessem um papel central nas atividades de modo a que fossem agentes ativos nas suas aprendizagens. Ao longo do Mestrado fui confrontada várias vezes com as potencialidades do ensino exploratório (Oliveira, Menezes, & Canavarro, 2013). Nesta estratégia de ensino, o professor procura não explicar tudo, deixando uma parte importante do trabalho de descoberta e de construção de conhecimento para os alunos realizarem (Ponte, 2005).

Assim, ao longo de toda a unidade tive a preocupação de não centrar o processo de ensino-aprendizagem em mim mas sim nos alunos, procurando sempre encontrar formas de os apoiar e melhorar as suas produções sem, no entanto, lhes dizer explicitamente o que fazer (Dias & Santos, 2009).

Apesar de o ensino exploratório ter sido a minha opção geral para o desenvolvimento curricular, as aulas nem sempre tiveram a mesma estrutura, sendo adaptadas aos objetivos específicos e às tarefas selecionadas. Assim, uma vez que as primeiras aulas foram baseadas em tarefas de exploração, a sua estrutura foi a geralmente assumida no ensino exploratório: (i) introdução de uma tarefa, (ii) realização da tarefa, (iii) discussão da tarefa, e (iv) sistematização das aprendizagens matemáticas (Oliveira, Menezes & Canavarro, 2013), notando que os dois últimos momentos ocorreram mais do que uma vez em cada aula. Embora nem todas as aulas tenham seguido esta estrutura, o trabalho autónomo e discussões coletivas foram uma constante. Deste modo, os alunos "exploraram" as tarefas de forma autónoma em pequenos grupos (normalmente pares) com vista à sua resolução (Oliveira, Menezes & Canavarro, 2013) partilhando ideias e registando as suas resoluções. Em seguida, mediante o objetivo das tarefas foram apresentadas uma ou mais resoluções, de modo a proporcionar aos alunos o contacto com uma diversidade de ideias matemáticas adequadas ao propósito matemático da aula (Canavarro, 2011) e ao mesmo tempo verificar as suas respostas ou detetar erros.

Antes do início da unidade, até tendo em conta o trabalho já desenvolvido pela orientadora cooperante, tinha planeado que em todas as aulas os alunos tivessem momentos em que iriam ao quadro apresentar as suas resoluções, explicando as mesmas aos colegas. No entanto, na primeira aula tive alguns problemas de tempo e optei por fazer apenas uma discussão oral, onde os alunos davam as suas respostas do lugar enquanto eu, se necessário, as escrevia no quadro. Esta modalidade foi adotada apenas como um "plano B" uma vez que precisava de avançar mais rapidamente em alguns momentos, no entanto, resultou tão bem que em muitas aulas passou a ser a opção previamente delineada. Apesar disto, houve muitos momentos em que os alunos foram ao quadro apresentar as suas resoluções e discuti-las com a turma, quer porque havia necessidade de mostrar diversos procedimentos, como porque a comunicação oral é também essencial.

Além desta oportunidade de encorajar os alunos a explicar as suas formas de pensamento e a compreenderem as explicações dos colegas (Mestre & Oliveira, 2012), outro dos motivos pelo qual apostei bastante nas discussões coletivas foi a heterogeneidade da turma. Assim, uma vez que devido aos diferentes ritmos de trabalho, nem sempre é possível "esperar" que todos os alunos terminem as tarefas, é nestes momentos que se torna possível "recuperar" os alunos que não concluíram e integrá-los na discussão e posterior sistematização. Apesar de muitas vezes se pensar que o professor tem uma participação secundária nesta fase, fica assim bastante claro que o seu papel é importantíssimo, uma vez que ao mediar e gerir as interações entre os alunos e as suas intervenções promovendo a qualidade matemática das mesmas (Canavarro, Oliveira & Menezes, 2012) permite que processo decorra de forma que as principais ideias relacionadas com as tarefas sejam clarificadas (Ponte, 2010).

No final, a sistematização de aprendizagens é também essencial, uma vez que permite formalizar os conteúdos abordados na(s) tarefa(s), institucionalizando o novo conhecimento matemático (Ponte, 2010) ou consolidando o mesmo. Deste modo, procurei ao longo de todas as aulas, mesmo nas tarefas mais simples, reforçar, no final da apresentação de resultados, as principais ideias envolvidas, ainda que se tratassem de tópicos já abordados em aulas anteriores.

Tal como já referi, a natureza das tarefas foi diversificada uma vez que cada tipo de tarefa desempenha um papel importante para alcançar determinados objetivos curriculares (Ponte, 2005). Assim, se as tarefas de natureza mais aberta tiveram a sua importância, especialmente na introdução de conceitos, houve também lugar a tarefas mais fechadas, nomeadamente exercícios de aplicação, com a finalidade de consolidar as aprendizagens dos conteúdos abordados ao longo da unidade. Neste caso, além de algumas fichas de trabalho que elaborei, dei particular atenção ao manual escolar pois, tendo em conta o seu percurso, os alunos estão muito familiarizados com este recurso.

Relativamente à natureza das tarefas, dei também um grande peso à resolução de problemas. Esta decisão prendeu-se obviamente com o estudo que realizo neste trabalho e portanto as quatro aulas finais foram dedicadas, ainda que não exclusivamente, à resolução de problemas de otimização, isto é, problemas em que o objetivo principal é determinar a solução ótima, ou seja o máximo ou o mínimo valor de uma determinada variável, tendo em conta certas restrições (Malaspina & Font, 2010; Rothlauf, 2011). Apesar disso, não foi apenas com vista à realização do meu estudo que investi tanto na resolução de problemas, sendo a minha grande motivação a noção de que os estudantes enriquecem e desenvolvem os seus conhecimentos ao resolver problemas (Hiebert & Wearne, 2003). O próprio Programa de Matemática A do Ensino Secundário refere que a resolução de problemas é uma contribuição fundamental para desenvolver a capacidade dos alunos de raciocinar matematicamente e de usar a Matemática em situações diversas (ME, 2001).

Sendo que o papel do professor na seleção dos problemas é fundamental (NCTM, 2008), ao longo de todo o planeamento geral da unidade de ensino tive uma preocupação constante de pesquisar, adaptar e selecionar uma série de problemas que permitissem aos alunos explorar diversas realidades e métodos e desenvolver as suas próprias estratégias. Assim, com exceção de dois problemas que indicavam especificamente qual o tipo de resolução pretendida (analítica ou gráfica), os alunos foram sempre "livres" de abordar os problemas da forma que consideraram mais pertinente. Neste âmbito não foi obviamente desconsiderada a calculadora gráfica uma vez que as orientações curriculares sugerem que existem vantagens no uso desta para atividades como a abordagem numérica de problemas e a modelação, simulação e resolução de situações problemáticas (ME, 2001). Além disso, tive também em conta os interesses, predisposições e experiências dos alunos (NCTM, 1991) procurando, sempre que adequado, desenvolver ou optar por problemas que fossem apelativos para os mesmos. Esta preocupação não foi exclusiva para os problemas e ao longo de toda a unidade de ensino procurei, indo ao encontro das orientações expressas no Programa de Matemática A do Ensino Secundário, estabelecer conexões com outras áreas do currículo, nomeadamente do curso que os alunos frequentam – Ciências Socioeconómicas.

As aulas baseadas na resolução de problemas foram também planeadas com particular atenção. Assim, procurei estimular ao máximo o trabalho autónomo dos alunos (individualmente ou em pares) evitando, sempre que possível, intervir de forma a encaminhá-los para determinadas estratégias. No entanto, existem algumas questões para as quais os alunos têm de ser orientados, nomeadamente a interpretação do contexto e a necessidade de dar uma resposta adequada ao problema e portanto foi neste sentido que procurei dinamizar as aulas. Além disso, sempre que circulei pela sala de aula procurei ter uma perceção de todas as estratégias usadas pelos alunos. Nas discussões tentei apresentar à turma sempre mais do que uma resolução, de modo a incluir as várias estratégias e, ao mesmo tempo, poder debater com a turma a eficácia e eficiência das mesmas. O próprio Programa defende o conhecimento da heurística de Pólya ou de outras, no sentido de organizar o pensamento dos alunos, não para estes abandonarem as suas estratégias pessoais, mas para que percebam que uma organização concreta pode permitir melhorar as suas produções.

Tal como já referi, o recurso à calculadora gráfica foi tido em conta na resolução de problemas, no entanto não se limitou a estas aulas. Assim, ao longo de toda a unidade, os alunos utilizaram a calculadora, tanto para cálculos rotineiros e verificações, como na realização de tarefas especificamente desenvolvidas para este recurso. Deste modo, uma vez que a calculadora gráfica permite desenvolver um conhecimento intuitivo que servirá de base para uma compreensão mais formal (Consciência, 2013), optei por recorrer à mesma numa das ideias mais complexas desta unidade – a noção de derivada enquanto função.

Ao longo de toda a unidade não limitei a utilização da tecnologia à calculadora gráfica, sendo que este tema transversal do Programa teve um papel importantíssimo no planeamento das aulas. As próprias orientações curriculares defendem que não é possível atingir os objetivos e competências gerais do Programa de Matemática A do Ensino Secundário sem recorrer à dimensão gráfica, e essa dimensão só é plenamente atingida quando os estudantes trabalham com uma grande quantidade e variedade de gráficos com o apoio de tecnologia adequada (ME, 2001). Além disso, o NCTM (2008) considera a tecnologia (em particular os computadores) como um dos princípios para o ensino da Matemática, afirmando que "a tecnologia é essencial no ensino e na aprendizagem da matemática" e além disso "influencia a matemática que é ensinada e melhora a aprendizagem dos alunos" (NCTM, 2008, p.26).

Assim, recorri a um *software* de Geometria Dinâmica, neste caso o GeoGebra. Optei por este recurso uma vez que considero que a sua utilização é muito intuitiva e permite que os alunos se adaptem fácil e rapidamente ao seu uso. Justamente por ser de simples utilização, penso que apela à participação ativa dos alunos, favorecendo a sua predisposição para a aprendizagem dos conceitos em questão, podendo assim melhorar a sua relação com a Matemática (Candeias, 2010). A utilização do GeoGebra teve uma importância central no início da unidade de ensino, uma vez que as duas tarefas planeadas para introduzir os conceitos de taxa média de variação e taxa de variação foram construídas de modo a serem resolvidas com este recurso. Segundo orientações curriculares, os estudantes devem ter oportunidade de trabalhar diretamente com um computador (ME, 2001), pelo que as tarefas foram resolvidas pelos alunos de forma autónoma, preferencialmente em pares. A escolha deste modo de trabalho prendeu-se com dois motivos: primeiro, e mais importante, porque o trabalho colaborativo deve ser fomentado, uma vez que os alunos, através da partilha de estratégias e dificuldades, podem realizar aprendizagens mais significativas. Por outro lado, se construísse grupos com mais elementos, o contacto direto de todos com o computador e o recurso seria posto em causa.

A decisão de recorrer ao GeoGebra especialmente no início da unidade prendeu-se com o facto de através da utilização da tecnologia na sala de aula os alunos assumirem um protagonismo ainda maior nas suas próprias aprendizagens (Amado & Carreira, 2008), o que foi essencial para a compreensão dos conceitos envolvidos. Tendo em conta este protagonismo dos alunos, a minha posição foi centralmente de facilitadora no uso do recurso, procurando dar a máxima autonomia aos alunos no que se refere à construção dos seus conhecimentos. Aliás, um dos grandes desafios das aulas com tecnologias para o professor é o facto de este deixar de ser o detentor e transmissor incontestável de conhecimento e passar a ser co-aprendente com os alunos (Ponte, 2000). Pela minha inexperiência nem sempre foi fácil gerir estas aulas uma vez que existem muitos fatores em "jogo" e o recurso pode tornar-se uma dificuldade, caso os alunos não respondam bem a esta "novidade". No entanto, e apesar de nenhum dos alunos ter contactado anteriormente com este *software* (ou qualquer outro no âmbito da Matemática) a receção foi a melhor possível, o que me leva a acreditar que, desde que preparadas minuciosamente, as aulas com recurso à tecnologia podem ser prática comum, trazendo grande benefícios para a aprendizagem dos alunos.

Além de utilizar o GeoGebra nas aulas iniciais, voltei a recorrer ao recurso diversas vezes ao longo de toda a unidade, de modo a introduzir uma dimensão gráfica nas aulas. Assim, vários exemplos foram dados através do GeoGebra e, em particular, criei ficheiros dinâmicos que, na minha opinião, foram essenciais para a compreensão da função derivada de algumas funções, nomeadamente a função módulo, e para introduzir a ideia de "pontos angulosos" e funções diferenciáveis. Tendo em conta a complexidade das noções matemáticas envolvidas, a possibilidade de visualização fez atenuar a necessidade de abstração e idealização, tornando assim as ideias menos herméticas e mais percetíveis (Amado & Carreira, 2008). Deste modo, apesar de os alunos não estarem a trabalhar diretamente com o *software*, uma vez os ficheiros estavam a ser projetados, as aprendizagens continuaram a ser beneficiadas, o que me leva a crer que, mesmo em escolas onde não seja possível os alunos trabalharem autonomamente nos computadores, o professor não deve abandonar estas práticas.

Finalmente, considero que, tendo em conta a quantidade de conceitos envolvidos nesta unidade e o pouco tempo que por vezes existe para consolidar os mesmos indo ao encontro das necessidades de todos os alunos, é necessário, em alguma aulas, enviar trabalho para casa. Apesar de em todas as aulas ter selecionado uma ou mais tarefas do manual escolar com esse fim, acabei por não enviar sempre trabalho de casa, uma vez que os alunos trabalharam muito bem durante as aulas, superando as minhas expectativas. Considerando o nível de escolaridade dos alunos, os trabalhos de casa que enviei nem sempre foram corrigidos no quadro, no entanto, estes foram sempre avisados que caso existissem dúvidas deveriam referi-lo sendo que assim existiria um momento dedicado ao esclarecimento das mesmas. Além disso, todos os alunos puderam frequentar o apoio da disciplina, com 90 minutos semanais, onde estivemos sempre três professoras disponíveis para esclarecer dúvidas.

3.4. As tarefas

As tarefas foram uma preocupação central na preparação da unidade uma vez que "são a pedra de toque de um desenvolvimento do currículo em que alunos e professores estão ativos, sendo através delas que se aprende, ensina, avalia e regula a atividade que deve ocorrer nas salas de aula." (Fernandes, 2011, p.7). Assim, fica bastante claro que uma das etapas mais importantes do trabalho do professor, enquanto planifica as suas aulas, é desenvolver, adaptar ou selecionar tarefas adequadas aos conteúdos a abordar, aos objetivos que se pretendem alcançar, ao tempo disponível e às características dos próprios alunos e respetivas formas e condições de trabalho (Ponte, 2005). Mais do que criar ou selecionar boas tarefas, esta necessidade de adequar as mesmas ao contexto deve ser uma preocupação constante nas práticas pedagógicas do professor. Tendo em conta a diversidade de alunos e contextos escolares com que um professor se depara ao longo da sua carreira, esta tarefa mostra-se bastante exigente, no entanto, a seleção de tarefas é indispensável para diferenciar o ensino e para que os alunos aprendam com significado (Fernandes, 2011).

No caso particular da minha prática letiva, uma vez que lecionei toda a unidade "Taxa de Variação e Derivada", pude selecionar as tarefas tendo em conta uma perspetiva global dos conteúdos abordados. As tarefas foram obviamente elaboradas tendo em conta os objetivos específicos e os subtópicos do Programa e, especialmente no início da unidade de ensino, nos subtópicos relacionados com a noção e interpretação geométrica de taxa média de variação e taxa de variação, foi dado particular ênfase à abordagem gráfica, de modo a promover aprendizagens significativas e não apenas a mecanização de processos. Esta foi uma das preocupações ao longo de toda a lecionação, uma vez que o conceito de derivada é muitas vezes abordado sem que se dê importância ao significado e à dimensão gráfica do mesmo, resumindo-se ao cálculo de derivadas de várias funções.

Tal como já referi, fiz também uma forte aposta na resolução de problemas, tendo em conta a importância das capacidades transversais para o desenvolvimento do currículo e também a problemática de estudo já referida, tendo elaborado várias tarefas neste sentido.

De notar que, tendo em conta o trabalho colaborativo desenvolvido por mim e pela minha colega de grupo na disciplina de IPP4, algumas das tarefas e planificações foram elaboradas conjuntamente, uma vez que a unidade de ensino que lecionámos foi a mesma. Assim, elaborámos em conjunto quatro das cinco tarefas apresentadas e duas das três fichas de trabalho, sendo que cada uma destas contém uma cadeia de tarefas. Estas produções, juntamente com propostas do manual escolar e com uma tarefa (Anexo 2.7.) e uma ficha de trabalho (Anexo 2.8.) que desenvolvi individualmente, foram a base das aulas que lecionei.

3.4.1. Tarefa "Estância de Ski"

A tarefa "Estância de Ski" (Anexo 2.1.) foi realizada na primeira aula da unidade de ensino e consiste numa tarefa de exploração com o objetivo de introduzir a noção de taxa média de variação e a sua interpretação geométrica. Tendo em conta a importância da dimensão gráfica na abordagem deste conceito, a tarefa foi elaborada de modo a ser resolvida recorrendo ao *software* GeoGebra. Uma vez que esta tarefa engloba conceitos totalmente desconhecidos para os alunos e de extrema importância na sua aprendizagem, foi dividida em duas partes para que entre elas se pudesse proceder à sistematização das aprendizagens.

A Parte I tem como finalidade o contacto dos alunos com a ideia intuitiva e cálculo informal de taxa média de variação de uma função para que posteriormente seja introduzida a fórmula da mesma e formalizado o conceito. A função que está na base desta tarefa é $f(t) = 0.5t^2 - 4t$ e representa a evolução da temperatura numa estância de Ski entre as 0h e as 8h de um determinado dia. Esta opção por um contexto bastante real teve como principal objetivo fazer com que os alunos dessem algum significado à noção de taxa média de variação num intervalo.

Vejamos então o que se define por *taxa média de variação*. Tendo em conta o contexto apresentado e a representação gráfica de parte da função (Figura 5) é fácil perceber que a temperatura evoluiu de forma diferente ao longo das várias horas, por vezes a diminuir e outras a aumentar. Além disso, o ritmo com que aumenta ou diminui também é variável consoante os intervalos de tempo escolhidos.

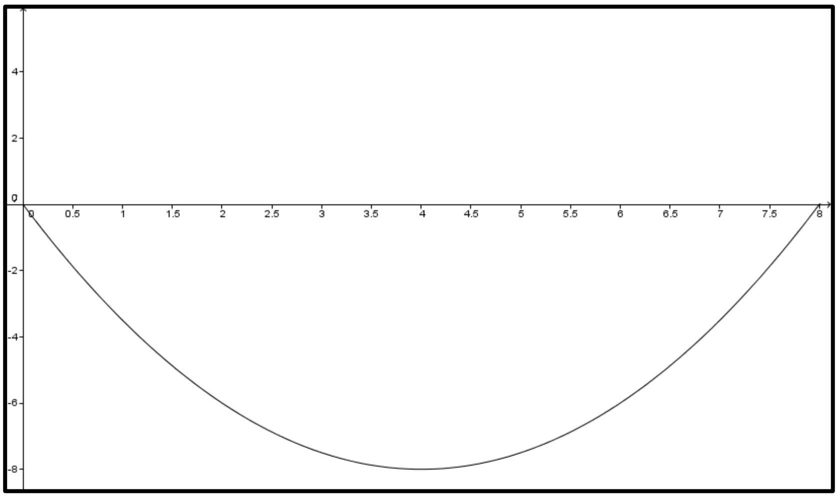


Figura 5- Representação gráfica da função utilizada na tarefa "Estância de Ski"

Por observação da representação gráfica, é fácil perceber que, por exemplo, entre as 0h e as 2h a temperatura está a diminuir tal como entre as 2h e as 4h, mas a descida é bastante mais acentuada entre as 0h e as 2h. Calculando as respetivas temperaturas temos $f(0) = 0$, $f(2) = -6$ e $f(4) = -8$. Fica então bastante claro que entre as 0h e as 2h a temperatura desceu 6 graus $(f(2) - f(0))$ enquanto entre as 2h e as 4h desceu 2 $\big(f(4) - f(2)\big)$. No entanto quanto terá diminuído, em média, por cada hora dos respetivos intervalos? Não será difícil perceber que os cálculos que permitem responder a esta pergunta são os seguintes: $\frac{f(2)-f(0)}{2-0} = \frac{-6-0}{2} = -3$, para o intervalo $[0,2]$ e $\frac{f(4)-f(2)}{4-2} = \frac{-8-(-6)}{2} = -1$ para o intervalo $[2,4]$.

Assim, concluímos que entre as 0h e as 2h horas a temperatura desceu, em média, 3 graus por hora e entre as 2h e as 4h por cada hora passada, desceu em média 1 grau. Através dos cálculos efetuados acima podemos então concluir a variação média da temperatura em cada um dos intervalos. Do mesmo modo, poderíamos selecionar qualquer outro intervalo pertencente ao domínio da função e proceder a cálculos semelhantes.

Genericamente, chama-se *taxa média de variação de uma função f num intervalo* $[a, b]$, ao quociente $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ e escreve-se $t.m.v_{[a,b]} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Foi com base nesta abordagem que a Parte I da tarefa foi desenvolvida. Esta é iniciada com a elaboração de um gráfico que os alunos, após visualizarem através do recurso, devem esboçar em papel. Esta opção prende-se com a pouca familiaridade dos alunos com o esboço de gráficos e pretende também constatar se estes perceberam o contexto do problema. Ainda a título de revisão é pedido aos alunos que estudem o sentido de variação e extremos da função, mais uma vez para promover uma maior familiarização com a mesma.

Deste modo, os alunos deverão identificar os intervalos em que a função é crescente, decrescente ou constante, recordando as seguintes definições já abordadas no 10.º ano: dados quaisquer a e b pertencentes a um intervalo I contido no domínio de uma função f tais que $a < b$ diz-se que f é (estritamente) *crescente* se $f(a) < f(b)$ e (estritamente) *decrescente* se $f(a) > f(b)$. Se todos os elementos de I tiverem imagens iguais então diz-se que a função f é *constante* em I. Diz-se que f é *monótona* em I se for crescente, decrescente ou constante. Os alunos deverão ainda, através da observação do gráfico e recorrendo às capacidades do GeoGebra, identificar os extremos da função no domínio indicado, isto é o(s) máximo(s) e/ou mínimo(s). Recordando a definição de extremos tem-se que:

- $f(a)$ é *máximo absoluto* de f se $f(a) \geq f(x), \forall x \in D$
- $f(a)$ é *mínimo absoluto* de f se $f(a) \leq f(x), \forall x \in D$
- $f(a)$ é *máximo (relativo)* de f se existe uma vizinhança V (intervalo aberto centrado em a) tal que $f(a) \geq f(x), \forall x \in V \cap D$
- $f(a)$ é *mínimo (relativo)* de f se existe uma vizinhança V (intervalo aberto centrado em (intervalo aberto centrado em a) tal que $f(a) \leq f(x), \forall x \in V \cap D$.

Em seguida os alunos calcularão, ainda de uma forma intuitiva, sem saber a fórmula, a taxa média de variação num intervalo, para posteriormente ser formalizado o conceito e introduzida a fórmula de cálculo. Após a formalização, o enunciado remete para o cálculo da taxa média de variação em quatro intervalos. Estes cálculos serão facilitados recorrendo ao GeoGebra, de modo a minimizar o tempo despendido em procedimentos rotineiros. Finalmente é pedido aos alunos que estudem a monotonia em certos intervalos, para os quais a taxa média de variação já tinha sido calculada e que conjeturem uma relação entre a monotonia de uma função num determinado intervalo e o sinal da taxa média de variação no mesmo. Esta última questão, de carácter mais aberto, teve como objetivo permitir aos alunos um momento de exploração mais vincado, podendo tecer conjeturas e testar a sua veracidade, uma vez que a relação pretendida não é linear.

A Parte II da tarefa promove ainda uma maior exploração do *software*, uma vez que o seu objetivo é que os alunos compreendam a interpretação geométrica da taxa média de variação. Qual será então o significado geométrico do novo conceito apresentado? Tal como ficou claro na abordagem à noção de taxa média de variação feita acima, a temperatura nem sempre varia da mesma forma sendo possível afirmar que entre as 0h e as 2h desce mais "rápido" que entre as 2h e as 4h. Mesmo sem fazer os cálculos estas "variações de rapidez" são visíveis na representação gráfica (Figura 5), uma vez que se relacionam com o declive (no sentido intuitivo, ou seja a inclinação) da curva em questão. Assim, a curva tem maior declive no intervalo $[0,2]$ que no intervalo $[2,4]$ (Silva & Paulo, 1968). Então, uma forma de estudar a variação da temperatura num intervalo $[a, b]$ é calcular o declive da reta que passa pelos pontos de abcissa a e b. De notar que é necessário considerar uma reta uma vez que o declive da curva varia de ponto para ponto, sendo que só o declive da reta é constante (Silva & Paulo, 1968).

Recordando então a definição de declive de uma reta: "chama-se *declive* (ou coeficiente angular) da reta r à razão $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$, entre a diferença das ordenadas de dois pontos distintos da reta e a diferença das abcissas desses pontos, tomadas pela mesma ordem." (Silva & Paulo, 1968, p.216).

Deste modo para calcular a evolução da temperatura entre as 0h e as 2h, vamos determinar o declive da reta que passa pelos pontos de abcissa 0 e 2. Facilmente se percebe que o declive da reta em questão é dado pela razão $\frac{f(2)-f(0)}{2-0} = \frac{-6-0}{2} = -3$. Como se pode perceber por este exemplo o resultado é igual ao obtido pelo cálculo da taxa média de variação no intervalo $[0,2]$. Este facto é facilmente explicado uma vez que a razão apresentada na definição de declive é equivalente, para a função f, à razão $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, para a e b pertencentes ao domínio de f. Assim, generalizando, tem-se que a taxa média de variação de uma função f num intervalo $[a, b]$ representa geometricamente o declive da reta definida pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

Apesar da relação evidente entre a fórmula da taxa média de variação e a sua interpretação geométrica, esta muitas vezes não é enfatizada nas aulas. Uma vez que a componente geométrica é muito importante e pode facilitar a compreensão dos conceitos, a segunda parte da tarefa foi justamente concebida para que fossem os alunos a conjeturar o significado geométrico de taxa média de variação.

Assim, os alunos construíram pontos e retas, para posteriormente estudarem o declive das mesmas. As retas em questão foram selecionadas de modo a coincidirem com os intervalos onde foi calculada a taxa média de variação na Parte I e, na última questão, os alunos tiveram de conjeturar a relação entre a taxa média de variação de um intervalo $[a, b]$ e o declive da reta que passa nos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$, de forma a concluírem autonomamente a interpretação geométrica do novo conceito abordado.

3.4.2. Tarefa “Continuando na Estância de Ski”

Tal como o nome indica, esta segunda tarefa vem na continuação da tarefa “Estância de Ski”, sendo que a situação apresentada e respetiva função são as mesmas. Esta tarefa, (Anexo 2.2.) também de exploração, foi desenvolvida com o objetivo de introduzir o conceito de taxa de variação de uma função num determinado instante, bem como a sua interpretação geométrica. Pela importância da visualização na abordagem deste conceito, o recurso ao GeoGebra foi mais uma vez essencial, tendo sido a tarefa desenvolvida com esse propósito.

Analogamente à tarefa anterior, pela riqueza e complexidade dos conceitos envolvidos, a tarefa está dividida em duas partes. A Parte I, desenvolvida de modo a introduzir a taxa de variação num instante a partir da taxa média de variação, inicia-se com o cálculo da taxa média de variação para intervalos de amplitude cada vez menor. Assim, a ideia é que os alunos se apercebam que à medida que os extremos do intervalo se aproximam, o valor da taxa média de variação também se aproxima cada vez mais de um determinado valor. De um modo mais formal, podemos considerar uma função f e o intervalo $[x_0, x]$, para $x \neq x_0$ com x a aproximar-se de x_0 . Temos então $t.m.v_{[x_0,x]} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. No entanto, podemos dar a esta razão uma outra designação: razão incremental da função f entre x e x_0. Esta nomenclatura decorre do facto de designarmos a diferença $x - x_0$ por acréscimo ou incremento.

O limite, caso exista, da taxa média de variação quando x tende para x_0 designa-se *taxa de variação ou derivada da função f no ponto x_0.*

Assim, chama-se *derivada* da função f em x_0, e representa-se por $f'(x_0)$, o limite da razão incremental de $f(x)$ entre x_0 e x, quando x tende para x_0 (se esse limite existir).

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

(Silva & Paulo, 1968, p.219)

Se a razão incremental não tiver limite quanto x tende para x_0 então dizemos que a função f não tem derivada no ponto x_0. Uma função diz-se derivável ou diferenciável num conjunto quando tem derivada finita em todos os pontos desse conjunto.

A fórmula análoga que também é abordada no Ensino Secundário é a seguinte:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Esta resulta da simples transformação $h = x - x_0$ mas, se esta mudança não for explicada aos alunos, estes acabam por considerar que, apesar de servirem o mesmo objetivo, têm significados completamente diferentes. Para introduzir taxa de variação optei por esta segunda fórmula uma vez que, na minha opinião, numa primeira fase, é mais intuitivo para os alunos perceberem que os extremos se estão a aproximar e consequentemente h tende para 0. No entanto, na sistematização da tarefa estas duas fórmulas foram abordadas, de modo que os alunos verificassem que são análogas. Além disso, para fazer esta exploração foi criado um seletor no *sofware* para que fossem justamente os alunos a escolher o incremento do intervalo, pelo que a designação deste por h facilitou muito. Nesta questão, mais do que a exploração de outra ferramenta no GeoGebra, o meu objetivo foi que os alunos percebessem que os intervalos a construir deveriam ter amplitudes cada vez menores, fazendo a ligação com a questão seguinte, onde deveriam conjeturar o valor do qual se aproxima a taxa média de variação à medida que a amplitude do intervalo diminui.

A Parte II da tarefa, iniciada após a sistematização dos resultados e definição de taxa de variação/derivada num instante, tem como principal fim conduzir à interpretação geométrica deste conceito. Veja-se então o significado geométrico de taxa de variação. Consideremos a função $f(t) = 0.5t^2 - 4t$ apresentada na tarefa. Podemos então considerar, por exemplo, o ponto $A = (5, f(5))$ pertencente à curva (Figura 6). Seja agora $P = (x, f(x))$ um ponto móvel sobre a curva C, que representa a função f. Como f é contínua é fácil perceber que quando x tende para 5, y tende para $f(5)$, ou seja, podemos afirmar que P tende para A.

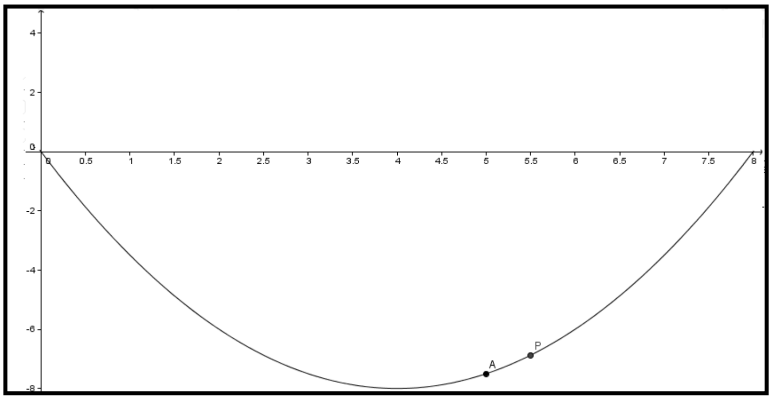


Figura 6- Representação gráfica da função utilizada na tarefa "Continuando na Estância de Ski" com os pontos A e P.

Podemos agora considerar a reta r definida por P e A e consequentemente calcular o seu declive, designando-o por d. Então, por definição, $d = \frac{y-f(5)}{x-5}$. Como $y = f(x)$ então $d = \frac{f(x)-f(5)}{x-5}$, ou seja a razão incremental que considerámos na definição de derivada.

Quando x tende para 5 o ponto P aproxima-se do ponto A e a reta r aproxima-se da tangente t à curva no ponto A, pelo que o declive d tende para o declive d_0 da tangente t, isto é,

$$d_0 = \lim_{x \to 5} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5}$$

Deste modo, em analogia com a definição de taxa de variação/derivada feita acima temos que, geometricamente, a derivada da função $f(t)$ no ponto de abcissa 5 representa o declive da reta tangente à curva C nesse ponto.

Generalizando podemos considerar uma qualquer função contínua f, representada por uma curva C. Seja x_0 um valor de x pertencente ao domínio de f e tal que y_0= $f(x_0)$. Então P_0=(x_0, y_0) é um ponto da curva C. Seja agora um ponto genérico móvel sobre a curva $C, P = (x, y)$. Uma vez que a função é contínua, não é difícil perceber que quando x tende para x_0, y tende para y_0. Assim, diz-se que o ponto P tende para o ponto P_0 (Silva & Paulo, 1968).

Podemos então considerar a reta definida por P e P_0 e consequentemente calcular o seu declive, designando-o d. Assim, $d = \frac{y-y_0}{x-x_0}$. No entanto, como $y = f(x)$ e $y_0 = f(x_0)$ temos $d = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, ou seja a razão incremental que considerámos na definição de derivada.

Supondo agora que quando x tende para x_0, d tende para um limite finito d_0, $d_0 = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ e a reta t, que passa por P_0 e tem por declive d_0 é a tangente à curva no ponto P_0.

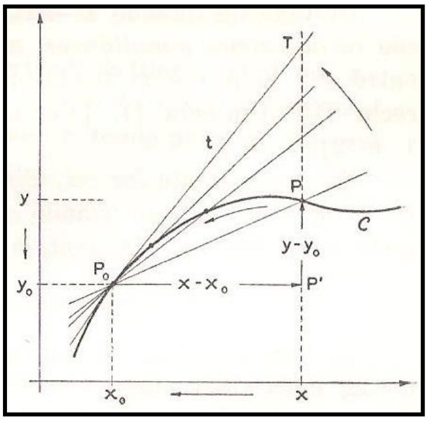


Figura 7- Esquema representativo das sucessivas secantes a tenderem para a tangente (Silva & Paulo, 1968)

Considerando a figura acima torna-se fácil entender que quando P, ponto móvel, tende para P_0 (ponto fixo), a secante P_0P tende para uma posição limite, t, que é tangente à curva no ponto P_0. Definimos o *declive da curva no ponto* P_0 como sendo o declive da tangente à curva nesse ponto.

Remetendo então para a definição de derivada fica claro que $f'(x_0)$ representa geometricamente o declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa x_0.

Obviamente esta definição formal feita a partir de um exemplo genérico é bastante complexa para os alunos, o que por vezes pode levar os professores a evitar a abordagem geométrica. Aliás, a investigação comprova que a interpretação geométrica no contexto das derivadas acaba por ser pouco explorada, ficando a atividade dos alunos limitada à aplicação de processos analíticos que são mecanizados (Almeida & Viseu, 2002). Assim, considero que é necessário evitar que os alunos acabem apenas por "decorar" que a derivada de uma função num ponto é o declive da reta tangente ao gráfico da função nesse ponto, sem no entanto compreender verdadeiramente o significado. Acredito que através de uma situação bem planeada e recorrendo a um exemplo concreto, explorado de forma correta, a interpretação geométrica de derivada pode até tornar-se intuitiva para os alunos e foi com esse intuito que a tarefa foi desenvolvida.

Assim, à semelhança do que aconteceu na tarefa "Estância de Ski", nesta segunda parte os alunos exploraram de forma mais acentuada a componente gráfica com o auxílio do GeoGebra, construindo pontos e retas para posteriormente estudarem o declive das mesmas. O seletor criado previamente volta a ser essencial, uma vez que os alunos poderão estudar o comportamento das retas e consequentemente do seu declive à medida que os valores estipulados pelo seletor se vão alterando. É nesta fase que os alunos contactam com a reta tangente ao gráfico em determinado ponto e conjeturam a relação entre o declive desta e a taxa de variação nesse ponto. Finalmente é pedida aos alunos uma generalização da interpretação geométrica da taxa de variação num determinado instante.

3.4.3. Tarefa "Derivando ponto a ponto"

Esta tarefa (Anexo 2.3.) teve como objetivo introduzir a derivada enquanto função real de variável real.

Considerando, por exemplo, a função $f(x) = x^2$ é fácil perceber que para cada ponto do seu domínio se pode considerar a reta tangente ao gráfico nesse ponto. Uma vez que as sucessivas retas tangentes terão sempre um declive igual ao dobro da abcissa selecionada (como por exemplo na Figura 8) podemos afirmar que $f'(x) = 2x\ \forall x \in \mathbb{R}$, ou seja $f'(x)$ é uma função real de variável real.

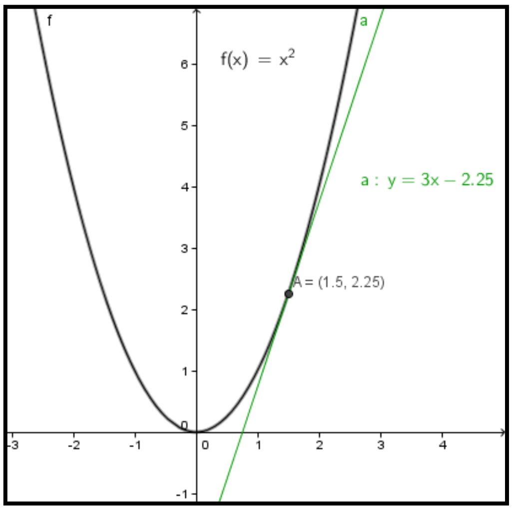


Figura 8- Representação gráfica da função $f(x) = x^2$ e da reta tangente ao gráfico no ponto A de abcissa 1.5

De uma forma geral pode então afirmar-se que "dada uma função $f(x)$, a expressão $f'(x)$ representa uma nova função de x, cujo domínio de existência é o conjunto de todos os pontos em que a função $f(x)$ tem derivada finita" (Silva & Paulo, 1968, p.222). A função $f'(x)$ que a cada valor de x pertencente ao conjunto referido anteriormente faz corresponder a derivada de $f(x)$ nesse ponto, designa-se por função derivada ou simplesmente derivada.

Foi justamente com base no exemplo dado acima, a função $f(x)$=x^2, que esta tarefa foi construída. De forma a permitir que os alunos fossem os principais intervenientes nesta "descoberta", a tarefa proposta tem um carácter exploratório e foi desenvolvida de modo a ser resolvida através da calculadora gráfica. Assim, além de os alunos explorarem este novo conceito ancorados fortemente na dimensão gráfica, esta tarefa permitiu-lhes a exploração de ferramentas desconhecidas do recurso. Deste modo, a tarefa é constituída por quatro questões que, à exceção da última, deveriam ser resolvidas com o uso exclusivo da calculadora gráfica. Os alunos deveriam inserir a função $f(x) = x^2$, selecionar diversos pontos pertencentes ao gráfico da mesma e, através das funcionalidades da calculadora, construir as respetivas retas tangentes ao gráfico nos mesmos. Em seguida deveriam registar o declive de cada uma das retas obtidas, encontrando depois uma expressão que relacionasse a abcissa do ponto por eles selecionado e o declive da respetiva reta tangente. Essa expressão, que a cada x da função original faz corresponder um determinado valor (o declive da tangente no ponto $(x, f(x))$), traduz uma nova função, *a função derivada*.

3.4.4. Ficha de Trabalho n.º 1

A primeira ficha de trabalho (Anexo 2.4.) foi entregue aos alunos após serem lecionadas as regras de derivação da função afim, da função polinomial do 2.º grau, do 3.º grau e da função racional do tipo $a + \frac{b}{x-c}$ para $b \neq 0$. Assim, os alunos no decorrer desta ficha tiveram de aplicar as seguintes regras que passo a demonstrar:

- *Derivada da função afim:*

  Seja $f(x) = mx + b$, com $m, b \in \mathbb{R}$.

  Pela definição de derivada temos que $f'(x) = \lim_{h\to0}(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}) = \lim_{h\to0}(\frac{m(x+h)+b-(mx+b)}{h}) = \lim_{h\to0}(\frac{mx+mh+b-mx-b}{h}) = \lim_{h\to0}(\frac{mh}{h}) = m$, ou seja $f'(x) = m$

  De notar que uma consequência imediata desta demonstração é que a derivada da função constante é 0.

- *Derivada da função polinomial de 2.º grau:*

  Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$, como $a, b, c \in \mathbb{R}$.

  Uma vez que se prova que "a derivada da soma de uma ou mais funções é sempre igual à soma das derivadas das funções dadas (onde estas tiverem derivada finita)"

(Silva & Paulo, 1968, p.229), podemos considerar $f(x) = g(x) + h(x)$ com $g(x) = ax^2$ e $h(x) = bx + c$, sendo $f'(x) = g'(x) + h'(x)$.

Assim, pela definição de derivada temos $g'(x) = \lim_{h\to 0}(\frac{g(x+h)-g(x)}{h}) = \lim_{h\to 0}(\frac{a(x+h)^2-ax^2}{h}) = \lim_{h\to 0}(\frac{ax^2+2axh+ah^2-ax^2}{h}) = \lim_{h\to 0}(\frac{2axh+ah^2}{h}) = \lim_{h\to 0}(\frac{h(2ax+ah)}{h}) = \lim_{h\to 0} 2ax + ah = 2ax$.

Como $h'(x) = b$ temos que $f'(x) = 2ax + b$

- *Derivada da função polinomial de 3.º grau:*

  Seja $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Novamente aplicando a derivada da soma, podemos considerar $f(x) = g(x) + h(x)$, com $g(x) = ax^3$ e $h(x) = bx^2 + cx + d$, sendo $f'(x) = g'(x) + h'(x)$.

  Assim, pela definição de derivada temos $g'(x) = \lim_{h\to 0}(\frac{g(x+h)-g(x)}{h}) = \lim_{h\to 0}(\frac{a(x+h)^3-ax^3}{h}) = \lim_{h\to 0}(\frac{ax^3+3ax^2h+3axh^2+ah^3-ax^3}{h}) = \lim_{h\to 0}(\frac{3ax^2h+3axh^2+ah^3}{h}) = \lim_{h\to 0}(\frac{h(3ax^2+3axh+ah^2)}{h}) = \lim_{h\to 0}(3ax^2 + 3axh + ah^2) = 3ax^2$.

  Como $h'(x) = 2ax + b$, temos que $f'(x) = 3ax^2 + 2ax + b$.

- *Derivada da função racional do tipo $a + \frac{b}{x-c}$*, com $a, c \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$:

  Uma vez que este tipo de funções pode ser obtido a partir de transformações na função $\frac{b}{x}$, irei demonstrar apenas a regra de derivação para $g(x) = \frac{b}{x}$.

  Pela definição de derivada temos que $g'(x) = \lim_{h\to 0}(\frac{g(x+h)-g(x)}{h}) = \lim_{h\to 0}(\frac{\frac{b}{(x+h)}-\frac{b}{x}}{h}) = \lim_{h\to 0}(\frac{\frac{bx-b(x+h)}{(x+h)x}}{h}) = \lim_{h\to 0}(\frac{bx-bx-bh}{hx(x+h)}) = \lim_{h\to 0}(\frac{-bh}{hx(x+h)}) = \lim_{h\to 0}(\frac{h(-b)}{h(x(x+h))}) = \lim_{h\to 0}(\frac{(-b)}{x(x+h)}) = \lim_{h\to 0}(\frac{(-b)}{x^2+xh}) = -\frac{b}{x^2}$

  Assim, generalizando e recorrendo novamente à derivada da soma temos que se $f(x) = a + \frac{b}{x-c}$ então $f'(x) = -\frac{b}{(x-c)^2}$.

Além de consolidar estas regras, a ficha teve como objetivo rever conceitos já abordados como a definição de derivada e a sua interpretação geométrica. Na sua maioria, as tarefas que constituem esta ficha remetem para o cálculo da equação da reta tangente num determinado ponto, tanto através do cálculo analítico da derivada nesse ponto, como através da visualização gráfica, no entanto, a dimensão analítica tem um peso maior, de modo a permitir aos alunos a apropriação das regras de derivação.

A última tarefa da ficha remete para a definição de funções diferenciáveis e para a noção intuitiva de "pontos angulosos". Recordando a definição, diz-se que uma função é *diferenciável ou derivável* num ponto "se tiver derivada finita nesse ponto, ou seja se existir uma reta tangente ao gráfico da função nesse ponto e essa reta não for vertical" (Teixeira et al, 1998, p.104).

Esta tarefa apela apenas à componente gráfica, uma vez que o enunciado não fornece nenhuma das expressões analíticas das funções em questão. Os alunos, através da observação, e após eu ter introduzido algumas funções que não são diferenciáveis em determinados pontos a título de exemplo, deveriam identificar, justificando, as funções que são, ou não, diferenciáveis no ponto de abcissa 2 e, no caso de o serem, determinar o valor da derivada.

3.4.5. Tarefa "Evolução das Bactérias"

A tarefa em questão (Anexo 2.5.) teve como objetivo introduzir a relação entre o sinal da função derivada e o sentido de variação e extremos da função original. Uma vez que este subtópico é muitas vezes introduzido de uma forma mecanizada, sem grande ênfase no significado, a tarefa de exploração foi construída de modo que os alunos tecessem, de forma autónoma, conjeturas sobre a relação pretendida fazendo assim uma aprendizagem significativa da mesma.

Tal como já foi explicitado em 3.4.1, o conceito de extremo de uma função foi abordado no 10.º ano de escolaridade em simultâneo com o estudo do sentido de variação de uma função. No entanto, é importante realçar a relação entre estes. Assim, se uma função contínua é crescente à esquerda de $x = a$ e decrescente à direita de $x = a$ então a função tem um *máximo* (relativo) para $x = a$. De forma análoga se uma função contínua é decrescente à esquerda de $x = a$ e crescente à direita de $x = a$ então a função tem um *mínimo* (relativo) para $x = a$. Este estudo pode ser realizado tendo em conta apenas a função original, sendo que ao longo do 10.º ano os alunos o fazem por observação gráfica, na maioria das vezes. Um dos grandes objetivos da unidade de ensino "Taxa de Variação e Derivada" é justamente fornecer ferramentas aos alunos para que o possam fazer recorrendo aos conhecimentos sobre derivadas e à relação existente entre sinal da função derivada e o sentido de variação e extremos da função original. Em seguida será então explicitada esta relação.

Considerando uma função linear $f(x) = mx + b$ é sabido que f é crescente, decrescente ou constante se $m > 0, m < 0, m = 0$, respetivamente. No entanto, tal como já foi provado acima, na demonstração das regras de derivação, m é a derivada de f. Tendo em conta o que foi dito, é bastante simples compreender que uma função linear é crescente, decrescente ou constante consoante a sua derivada for positiva, negativa ou nula. Parece então bastante natural estender esta regra para quaisquer outras funções que tenham derivada num determinado intervalo. Assim, prova-se que:

- Se uma função tem derivada positiva em todos os pontos de um intervalo, a função é crescente nesse intervalo;
- Se uma função tem derivada negativa em todos os pontos de um intervalo, a função é decrescente nesse intervalo;
- Se uma função tem derivada nula em todos os pontos de um intervalo, a função é constante nesse intervalo.

(Silva & Paulo, 1968, p.242)

Na minha opinião, uma forma produtiva de introduzir esta relação e de ao mesmo tempo reforçar a interpretação geométrica de derivada é justamente considerar o declive das sucessivas retas tangentes ao gráfico num determinado intervalo. Assim, considerando a Figura 9, que representa a função apresentada na tarefa no domínio referido, podemos observar que: o declive da reta tangente ao gráfico nos pontos P_1 e P_3 é positivo, no ponto P_2 é negativo e em A e B é nulo.

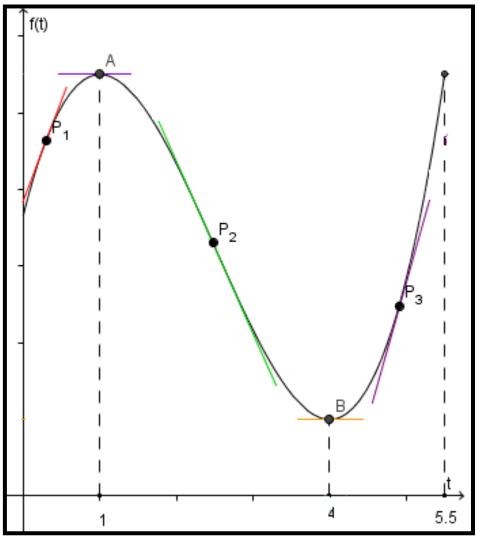


Figura 9- Representação gráfica da função f utilizada na tarefa "Evolução das bactérias"

Facilmente se percebe então a relação acima referida uma vez que, entre o ponto de abcissa 0 e o ponto A as retas tangentes ao gráfico terão sempre declive positivo e a função f é crescente, o que se verifica também entre o ponto B e o ponto de abcissa 5.5. Entre A e B o declive das sucessivas retas tangentes ao gráfico é negativo e observa-se que a função é decrescente.

Foi justamente nesta perspetiva que elaborei a primeira questão da tarefa, apelando fortemente à visualização gráfica. Assim, foi pedido aos alunos que estudassem, por observação, o sinal do declive da reta tangente ao gráfico em pontos de determinado intervalo e consequentemente o sinal da derivada nesses mesmos intervalos. Em seguida, ainda por observação, os alunos deveriam indicar o sentido de variação da função original e o valor da função derivada para os pontos de abcissa 1 e 4, para que posteriormente relacionassem estes pontos com os zeros da função derivada e com os extremos da função original.

Veja-se então de que se trata esta relação. Pela Figura 9 é fácil perceber que a derivada é nula nos pontos A e B (uma vez que o declive da reta tangente ao gráfico nesses pontos é 0) e consequentemente estes são os zeros da função derivada. Percebe-se também que no ponto A a derivada passa de positiva a negativa e no ponto B passa de negativa a positiva. Além disso, considerando a representação gráfica da função f podemos afirmar que A é um ponto de máximo e B é um ponto de mínimo da função. Este facto não é um acaso e a teoria demonstra que os pontos onde a função derivada muda de sinal correspondem a extremos da função original. Assim, de uma forma geral tem-se que:

- Ponto em que a derivada de uma função muda de sinal, passando de positiva a negativa, é ponto de máximo relativo da função (supondo que esta é contínua nesse ponto).
- Ponto em que a derivada de uma função mude de sinal, passando de negativa a positiva, é ponto de mínimo relativo (supondo que esta é contínua nesse ponto).

(Silva & Paulo, 1968)

Esta relação não é linear e os alunos poderiam ter alguma dificuldade em fazer conjeturas apenas a partir da dimensão gráfica. Deste modo, as questões seguintes da tarefa constituíram a componente analítica, onde os alunos tiveram de considerar uma determinada expressão algébrica que corresponde à função representada graficamente no início da tarefa e determinar a sua função derivada. Em seguida, foi-lhes pedido para estudarem analiticamente o sinal da função derivada comparando com as respostas dadas nas questões anteriores. Desta forma o pretendido foi que os alunos compreendessem que os zeros da derivada correspondem aos pontos de abcissa (da função original) onde a derivada é zero. Finalmente, as duas últimas questões, de carácter mais aberto, têm como objetivo que os alunos conjeturem a relação entre o sinal da função derivada e o sentido de variação e extremos da função original. A questão final, onde é pedida a relação entre os zeros da derivada e os extremos da função original inclui um quadro de sinal, com o propósito de que o primeiro contacto dos alunos com este tipo de quadro (que abarca a derivada e a função original) fosse contextualizado e repleto de significado, ao invés de corresponder a uma imposição e mecanização.

3.4.6. Ficha de Trabalho n.º 2

O principal objetivo desta ficha é consolidar a relação entre o sinal da função derivada e o sentido de variação e extremos relativos da função original. A ficha (Anexo 2.6.) é iniciada por uma tarefa de resolução analítica com o propósito de estudar a sentido de variação e extremos de uma função a partir do sinal da sua derivada. São também apresentadas outras duas tarefas que reforçam esta relação através da dimensão gráfica. Além destas tarefas, a ficha contém dois problemas de otimização. Esta escolha prendeu-se não só com a importância deste tipo de problemas para o estudo da relação entre o sinal da derivada e o sentido de variação e extremos relativos de uma função, como principalmente pela importância que a resolução de problemas tem em todo o processo ensino-aprendizagem da Matemática. Um dos temas transversais ao currículo, a resolução de problemas, tem nesta fase um papel central uma vez que sendo um meio privilegiado para a aprendizagem (NCTM, 2000) pode proporcionar aprendizagens bastante significativas e um estudo contextualizado da relação entre o sinal da derivada e o sentido de variação e extremos relativos de uma função.

3.4.7. Tarefa “A População da Urbanização”

Esta tarefa (Anexo 2.7.), apesar de inserida nas aulas referentes à relação entre o sinal da derivada e sentido de variação e extremos relativos de uma função, procura relacionar alguns dos conteúdos abordados anteriormente e dar uma ideia da aplicabilidade prática dos conceitos lecionados ao longo da unidade de ensino, uma vez que sempre que possível o professor deve evidenciar aplicações da Matemática (ME, 2001). Assim, a primeira questão da tarefa remete para uma situação de contexto real que os alunos devem equacionar. Nesta questão tinha como objetivo verificar se os alunos têm ou não dificuldades em traduzir linguagem natural numa expressão analítica. Na segunda questão os alunos tiveram de calcular a taxa de variação em três instantes diferentes, neste caso anos, e interpretar os resultados tendo em conta o contexto. Ao propor esta questão a minha intenção foi que os alunos compreendessem que a taxa de variação não é apenas um conceito matemático abstrato e que tem utilidade em diversas áreas, nomeadamente no estudo demográfico da população, estudo com o qual estes estão bastante familiarizados na disciplina de Geografia. Além disso, pretendia também verificar se os alunos compreenderam o significado de taxa de variação num determinado instante e de que forma interpretam os resultados no contexto de um problema real. Mais, quis ainda constatar se se recordavam que taxa de variação e derivada são o mesmo conceito, uma vez que a partir da sua introdução os alunos passam geralmente a ser apenas confrontados com a palavra derivada. Pretendia ainda perceber se eles aplicam as regras de derivação num contexto diferente do habitual.

A terceira e última questão, com um enunciado bastante diferente do habitual, tanto nesta unidade como no percurso dos alunos em geral, tinha como objetivo levá-los a refletir sobre o tipo de informações de que precisam para estudar a evolução da população num determinado período de tempo e sobre a forma como o estudo das derivadas, especialmente da relação entre o sinal da função derivada e o sentido de variação e extremos da função original, pode ser útil em problemas deste tipo.

3.4.8. Ficha de Trabalho n.º 3

A última ficha que desenvolvi (Anexo 2.8.), constituída por cinco tarefas, tem como principal objetivo a resolução de problemas de otimização variados. Assim, alguns dos problemas estão equacionados enquanto outros se apresentam apenas em linguagem natural e alguns exigem uma resolução analítica enquanto outros apelam à representação gráfica. Além dos problemas de otimização, algumas das tarefas incluem outras questões que remetem para tópicos lecionados noutras unidades de ensino e até noutros anos de escolaridade. Esta escolha prende-se com a necessidade de variar o tipo de trabalho que é proposto aos alunos e a importância de estabelecer conexões entre os diversos temas matemáticos do currículo (ME, 2001). As funções racionais, lecionadas no início do 2.º Período, foram também uma aposta, uma vez que desta forma os alunos podem contactar com estas funções de uma forma contextualizada. Além disso, uma vez que a turma frequenta o curso de Ciências Socioeconómicas procurei ainda englobar problemas sobre custos e lucros, demonstrando mais uma vez a aplicabilidade da Matemática. De realçar que uma das questões, onde era expressamente pedida a resolução gráfica, teve como objetivo favorecer uma exploração da calculadora gráfica no contexto de problemas de otimização e simultaneamente permitir-me averiguar a forma como os alunos reagem quando são confrontados com a obrigatoriedade de usar este recurso.

3.5. A Avaliação

A avaliação constitui um processo regulador do ensino, orientador do percurso escolar (DL 139/2012) e o seu principal objetivo é promover a aprendizagem dos alunos e informar os professores para a tomada de decisões sobre o ensino (NCTM, 1991).

Tendo em conta este papel essencial da avaliação no processo ensino-aprendizagem fica bastante claro que as decisões tomadas a este respeito devem ser muito ponderadas pelos professores. Mais do que construir elementos de avaliação diversificados e eficazes, é necessário que os professores reflitam sobre os resultados, sendo que esta componente de análise é contemplada na própria definição de avaliação dada pelo atual Programa de Matemática A do Ensino Secundário, segundo o qual "avaliar os conhecimentos matemáticos dos estudantes significa reunir e analisar dados sobre o que estes sabem a respeito de conceitos e métodos matemáticos" (ME, 2001, p.13).

Além de informar os professores sobre as aprendizagens e progressos dos alunos, a avaliação pode e deve ser um processo onde estes são intervenientes ativos, uma vez que os alunos podem usar as avaliações para se tornarem estudantes autónomos (NCTM, 1991).

Para que a avaliação possa cumprir todas as suas finalidades, nomeadamente contribuir para ajudar os alunos a melhorar as suas aprendizagens (Fernandes, 2011) é necessário que os instrumentos de avaliação sejam diversificados, não se reduzindo aos testes escritos que, apesar de terem a sua importância, em particular no Ensino Secundário, nem sempre promovem todas as competências e capacidades que se pretendem desenvolver neste ciclo de escolaridade (ME, 2001). No caso da unidade de ensino que lecionei a avaliação esteve presente de várias formas. Em primeiro lugar observei em todas as aulas as reações dos alunos, bem como as suas questões e comentários aos tópicos que estavam a ser lecionados. De uma forma mais formal, e segundo a metodologia da minha orientadora cooperante, em todas as aulas os alunos foram avaliados pelas suas participações, nomeadamente no que se refere à resposta a questões colocadas por mim e à apresentação de resoluções de tarefas propostas oralmente ou por escrito no quadro. Deste modo, sempre que o aluno se voluntaria para ir ao quadro ou responder oralmente a alguma questão, é "cotada" uma participação, sendo que a globalidade destas participações constitui um dos elementos da avaliação no final do período.

No que se refere a avaliações escritas existiram dois momentos: o primeiro constou de duas questões (uma de escolha múltipla e outra de desenvolvimento com três alíneas) colocadas na ficha de avaliação realizada a meio da unidade (Anexo 3.1). O objetivo destas questões foi avaliar os conhecimentos dos alunos sobre as noções de taxa média de variação e taxa de variação/derivada e respetivo cálculo. O segundo momento foi uma outra ficha de avaliação (Anexo 3.2.), realizada já no 3.º Período onde, mais uma vez, duas das questões, uma de escolha múltipla e outra de desenvolvimento com cinco alíneas, tinham como finalidade verificar de que forma os alunos resolvem tarefas sobre as regras de derivação e a relação entre o sinal da função derivada, sentido de variação e extremos da função original.

3.6. As aulas

3.6.1. 1.ª aula: 25 de fevereiro de 2015

O objetivo desta aula (Anexo 1.1.) foi introduzir o conceito de taxa média de variação e respetiva interpretação geométrica. Uma vez que este foi o primeiro contacto dos alunos com o conceito, e tendo em conta a importância que o mesmo tem para a aprendizagem de toda a unidade de ensino, a aula foi preparada meticulosamente no sentido de maximizar a participação dos alunos enquanto intervenientes ativos nas suas aprendizagens. A aula foi construída a partir da tarefa "Estância de Ski" (Anexo 2.1.) sendo os conceitos formais introduzidos entre questões da mesma e havendo lugar à discussão coletiva e sistematização entre as duas partes da tarefa.

Uma vez que para a aula foram necessários vários computadores portáteis, os alunos foram avisados que, caso preferissem utilizar o seu computador pessoal, o poderiam fazer, desde que instalassem previamente o GeoGebra. Assim, os alunos aderiram muitíssimo bem a esta ideia e só foram necessários cinco dos catorze computadores disponíveis, uma vez que a maioria preferiu trabalhar no seu computador. Tendo em conta as características da turma e a forma de trabalho de alguns alunos, nomeadamente do aluno com Necessidades Educativas Especiais, apesar de a tarefa estar planeada para ser realizada a pares, houve dois alunos que preferiram trabalhar individualmente.

Sendo esta a primeira vez que os alunos trabalharam com computadores na aula de Matemática e uma vez que eu nunca tinha assistido (nem lecionado) a nenhuma aula deste tipo, tive uma grande preocupação na preparação inicial, isto é, antes de a aula começar distribui pelas carteiras um guião de utilização do GeoGebra (Anexo 1.1.), a primeira parte da tarefa e liguei alguns dos computadores que tinha levado (apesar de nem todos terem sido necessários) e abri de imediato um ficheiro vazio de GeoGebra. Deste modo, quando a aula começou, não houve a necessidade de gastar tempo com este tipo de questões técnicas, o que penso, foi fundamental para o bom funcionamento da mesma.

Assim, após todos os alunos escreverem o sumário e ligarem os seus computadores pessoais, fiz uma breve introdução à tarefa, explicando que deveriam utilizar o *software* para os cálculos e, caso tivessem alguma dúvida, deveriam servir-se do guião. Além disso, introduzi algumas das ferramentas do GeoGebra, através da projeção de um ficheiro, de modo a facilitar o trabalho.

Ao longo do trabalho autónomo na primeira parte da tarefa os alunos mostraram-se motivados e, na sua maioria, não mostraram grandes dúvidas na resolução das questões. No entanto, uma vez que a tarefa tinha um contexto, muitos alunos revelaram algumas dificuldades em interpretar os resultados de forma contextualizada. Apesar de este tipo de dificuldades estar previsto, revelou-se mais condicionante do que era esperado, o que acabou por aumentar o tempo gasto nesta parte da tarefa.

O uso do *software* trouxe também algumas complicações técnicas, em particular, os alunos tiveram algumas dificuldades em introduzir expressões no ficheiro, devido a algumas características de linguagem do GeoGebra. Outro dos fatores que acabou por se tornar mais problemático do que o esperado foi a reticência dos alunos em realizar os cálculos através do *software*, sendo que muitos calcularam manualmente ou recorrendo à calculadora, o que consumiu bastante tempo. Embora tenha previsto que os alunos poderiam ter algumas dificuldades com o recurso, nunca pensei, tendo em conta a familiaridade deles com as tecnologias, que se recusassem a realizar os cálculos através do recurso, mesmo quando eu insistia para isso. As diversas questões que os alunos colocaram sobre a utilização do *software* e a falta de autonomia dos mesmos, foram também um pouco complicadas de gerir. Apesar destas situações e do tempo gasto ter sido superior ao previsto, a primeira parte da tarefa correu bastante bem e mesmo as questões mais delicadas foram facilmente respondidas pelos alunos.

Devido à falta de tempo, optei por fazer apenas uma discussão oral, isto é, fui pedindo aos alunos para irem respondendo às questões oralmente e frisei que caso alguém tivesse dúvidas ou tivesse dado outra resposta deveria intervir e esclarecer as suas questões. Este método resultou muitíssimo bem, uma vez que os alunos, por vezes na ânsia de avançar nas suas resoluções, dispersam um pouco e prestam pouca atenção ao colega que está a expor a sua resolução no quadro. Neste caso, como era eu que estava no quadro eles prestaram mais atenção à discussão dos resultados, mostrando-se bastante interessados. Relativamente à participação voluntária dos alunos no sentido de responder às questões, houve, tal como é costume nesta turma, uma série de candidatos, uma vez que os alunos estão sempre prontos a participar. Este facto decorre das práticas letivas da orientadora cooperante, que valoriza bastante as "idas" ao quadro dos alunos. Assim, apesar de não ter pedido a ninguém para apresentar a sua resolução no quadro, os alunos reagiram muito bem a estas participações "orais". Além deste interesse e atenção acrescidos dos alunos no momento da discussão, o facto de não ter pedido a um aluno para ir ao quadro resolver cada uma das questões, permitiu-me também ganhar bastante tempo no decorrer da mesma.

Em seguida formalizei o conceito de taxa média de variação e a relação entre a monotonia de uma função num determinado intervalo e o sinal da taxa média de variação no mesmo. Neste momento os tempos também não foram cumpridos uma vez que os alunos demoraram muito mais tempo a escrever do que estava previsto. Este facto foi uma constante ao longo da maioria das aulas, pelo que nas seguintes estipulei sempre tempos mais alargados para os momentos onde os alunos teriam de copiar informações para os cadernos diários.

Entreguei então a segunda parte da tarefa e, uma vez que esta é resolvida quase na totalidade através do GeoGebra, expliquei aos alunos alguns comandos, nomeadamente como inserir pontos e construir retas.

Esta parte da tarefa correu bastante bem, com a maioria dos alunos a manusearem o *software* facilmente e a chegarem à conclusão principal, a interpretação geométrica da taxa média de variação, bastante rápido. Uma vez que a aula estava quase no final, optei por deixar a discussão e sistematização para a seguinte, dando por terminada a aula quando a maioria dos alunos concluiu a tarefa.

Apesar de não ter cumprido todos os momentos planificados, penso que de uma forma geral a aula correu bem, os alunos chegaram às conclusões pretendidas sem grandes dificuldades e sem que eu tivesse de os encaminhar, o que foi bastante positivo tendo em conta a falta de autonomia deles. Além disso, o uso do recurso foi um fator extra de motivação, sendo que no final da aula vários alunos questionaram se "na próxima aula temos computadores outra vez?" afirmando que "foi super giro".

Uma vez que a discussão e sistematização desta parte da tarefa não foram realizadas, refiz a planificação da aula seguinte, tendo em conta este não cumprimento dos tempos. No entanto, considero que os objetivos gerais foram atingidos praticamente na totalidade uma vez que os alunos realizaram aprendizagens significativas sobre o conceito de taxa média de variação e sobre a sua interpretação geométrica, mesmo ainda sem a sua formalização.

Do ponto de vista pessoal, senti-me bastante satisfeita com a receção dos alunos ao *software* pois estava bastante reticente que o mesmo trouxesse complicações incontornáveis ao funcionamento da aula, o que não se verificou. Quanto à minha prestação, penso que o balanço foi positivo, uma vez que, apesar das dificuldades em chegar rapidamente a todos os alunos, acabei por conseguir dar resposta às suas solicitações, apoiando-os na aprendizagem.

3.6.2. 2.ª aula: 27 de fevereiro de 2015

A segunda aula (Anexo 1.2.) foi iniciada com a discussão dos resultados da Parte II da Tarefa "Estância de Ski" (Anexo 2.1.) Tal como na aula anterior, a discussão foi feita oralmente, sendo que alguns alunos me foram dando a resposta às questões enquanto eu as fui escrevendo no quadro. Tendo em conta que esta parte da tarefa era bastante visual, no início da aula projetei um ficheiro de GeoGebra com as retas em questão e interroguei a turma sobre as suas próprias retas. Mais uma vez, os alunos reagiram muitíssimo bem a este tipo de discussão, mostrando-se atentos e participativos. As respostas dadas foram sempre adequadas e os alunos não revelaram qualquer dificuldade em conjeturar a interpretação geométrica da taxa média de variação.

Em seguida passei à sistematização dos resultados. Apesar de os alunos terem compreendido facilmente a relação entre a taxa média de variação de um intervalo $[a, b]$ e o declive da reta que passa nos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$, penso que nesta fase poderia ter proporcionado aprendizagens mais sólidas aos alunos, uma vez que a minha explicação, relacionando o cálculo do declive com a expressão da taxa média de variação, foi um pouco rápida e confusa.

Projetei em seguida um quadro com a definição formal que os alunos escreveram no seu caderno diário. Enquanto isso entreguei a Parte I da Tarefa "Continuando na Estância de Ski" (Anexo 2.2.). Quando todos os alunos já tinham terminado de escrever a definição, chamei a atenção para alguns pontos desta parte da nova tarefa, nomeadamente para a utilização do GeoGebra nos cálculos e para o tipo de intervalo referido. Enfatizei ainda o facto de irem trabalhar com o seletor e expliquei de que forma o deveriam utilizar. No entanto, este momento introdutório não foi muito bem sucedido, uma vez que os alunos não prestaram muita atenção ao que eu estava a dizer, iniciando de imediato a resolução da tarefa. Penso que se tivesse destacado mais a importância do que estava a ser dito, este momento poderia ter sido mais produtivo. Não posso deixar de referir o entusiasmo dos alunos no trabalho com o *software*, sendo que mais uma vez trouxeram o seu computador pessoal. Para o bom funcionamento da aula penso que foi também essencial o facto de ter enviado previamente o ficheiro com o seletor para todos os alunos (caso trouxessem o seu computador) e instalado o mesmo em todos os computadores que levei para a sala de aula.

Uma vez que a maioria dos alunos não prestou atenção à explicação sobre o tipo de intervalo que estava a ser pedido na ficha e a sua relação com o seletor h, o trabalho autónomo acabou por se alongar mais do que previsto.

Iniciei em seguida a discussão, seguindo o método já mencionado acima, o que voltou a resultar bastante bem. Em particular, numa das questões os alunos tinham de selecionar valores de h cada vez menores de modo a formar intervalos com amplitudes sucessivamente menores. Alguns alunos não compreenderam esta orientação e selecionaram valores aleatórios. Assim, na discussão, o primeiro aluno que se voluntariou disse um valor de h e em seguida fui questionado outros colegas de modo a obter valores de h sucessivamente inferiores. Esta "busca" por valores de h acabou por ser essencial uma vez que fui enfatizando a importância de estes serem cada vez menores, o que acabou por esclarecer os alunos que não tinham compreendido de que forma deveriam selecionar estes valores.

Em seguida procedi à sistematização de resultados e introduzi a definição de taxa de variação/ derivada. Tendo em conta a complexidade deste conceito, procurei abordá-lo da forma mais natural possível, recorrendo à tarefa que estavam a resolver. Apesar de acreditar que a maioria compreendeu a minha explicação, o facto de a definição ser dada a partir do conceito de limite, acabou por ser um pouco problemático uma vez que muitos alunos ainda não tinham interiorizado o significado deste conceito, sendo para a maioria uma ideia muito “artificial”.

Os alunos registaram então um quadro com a definição enquanto eu entreguei a segunda parte da tarefa. Uma vez que esta parte não exigia nenhum novo comando do GeoGebra, os alunos iniciaram de imediato a resolução e responderam às questões sem grandes problemas. De notar que tinha previsto algumas dificuldades na questão em que é pedida a equação da reta tangente num determinado ponto, mas os alunos responderam, na sua maioria, de forma bastante confiante (e correta) a esta questão. A maior dificuldade que observei ao longo desta parte da tarefa foi na linguagem, especialmente na última questão onde era pedida uma conjetura sobre a interpretação geométrica da taxa de variação. Os alunos chamavam-me aos seus lugares, dando-me a resposta correta, mas não sabendo como escrevê-la, dizendo-me muitas vezes “é o declive daquela reta… da que é tangente”.

Uma vez que já não faltava muito tempo para a aula terminar, iniciei a discussão oral, mesmo sabendo que não a iria concluir. Dado que esta segunda parte também está, de certa forma, dividida em duas foram discutidas metade das questões, sendo que na questão final pedi a um aluno para ir ao meu computador construir a reta pretendida e variar o valor de h, de modo a que todos os colegas observassem o que acontece com o declive das sucessivas retas. Apesar de o aluno ter feito uma apresentação algo confusa, toda a turma compreendeu o que estava a acontecer com o declive das sucessivas retas quando se diminuía o valor do seletor, interagindo constantemente com o colega.

Apesar de a planificação não ter sido totalmente cumprida, o que fez com que alterasse a plano da aula seguinte, penso que os objetivos da aula foram atingidos, em particular, acredito que a definição de derivada foi apreendida com significado por parte dos alunos. Do ponto de vista pessoal, existiram alguns momentos em que poderia ter contribuindo de forma mais eficaz para as aprendizagens dos alunos. No entanto, o balanço da aula é bastante positivo e mais uma vez os alunos demonstraram que o recurso ao GeoGebra foi uma ótima aposta, ficando até um pouco dececionados por na aula seguinte os computadores já não serem necessários.

3.6.3. 3.ª aula: 02 de março de 2015

Uma vez que na aula anterior não foi possível terminar a discussão, esta aula (Anexo 1.3.) começou justamente com esse momento. Deste modo, uma aluna foi ao quadro calcular a equação da reta tangente pedida no enunciado e as restantes questões foram discutidas oralmente. No final deste momento foi bastante claro que a maioria dos alunos compreendeu a interpretação geométrica de taxa de variação/derivada num determinado instante. Em seguida procedi à sistematização das aprendizagens, projetando um quadro para os alunos registarem.

Após este momento dei início à correção do trabalho de casa. Na generalidade os alunos tinham realizado os exercícios propostos sem grandes dificuldades e, apesar de este momento se ter desenrolado de forma organizada, penso que poderia ter chamado a atenção para alguns dos pontos-chave dos exercícios realizados de uma forma mais enfática.

Seguidamente os alunos realizaram autonomamente um exercício do manual escolar cujo objetivo era contactar com a definição de derivada e aplicar a sua interpretação geométrica. Os alunos demoraram um pouco mais do que estava previsto nos cálculos da equação da reta tangente, no entanto, a maioria compreendeu de imediato o enunciado, reconhecendo a definição de derivada através do limite, abordada na aula anterior. No final deste momento de trabalho autónomo um aluno foi ao quadro apresentar a sua resolução e não havendo dúvidas iniciei uma nova fase da aula.

Assim, após explicar aos alunos a importância do método que ia abordar, fiz, no quadro, o primeiro exemplo do cálculo de derivada num ponto por definição e em seguida utilizei o valor obtido para encontrar a equação da reta tangente ao gráfico da função em questão no ponto dado. Este momento correu bastante bem, uma vez que os alunos se mostraram muitíssimo atentos e participativos. Foi, no entanto, de imediato notória a grande dificuldade dos alunos em desenvolver casos notáveis, o que viria a ser uma constante ao longo das aulas seguintes. Do ponto de vista pessoal, fiquei bastante satisfeita com este momento porque, apesar de cometer algumas falhas, como por exemplo estar muito tempo virada para o quadro, considero que melhorei bastante a minha organização. Também, devido à insegurança e ao mesmo tempo à noção da importância de uma aprendizagem sólida destes cálculos, enfatizei, talvez demasiado, os procedimentos envolvidos na determinação da equação da reta tangente, sendo que poderia ter aproveitado para voltar a realçar a componente geométrica.

Após os alunos registarem este exemplo, realizaram autonomamente um exercício do manual semelhante ao que foi feito no quadro. Mais uma vez as dificuldades de cálculo foram uma constante, em particular nos casos notáveis, o que acabou por consumir bastante tempo. Outra das dificuldades verificada, já estando prevista, foi o surgimento do conceito de limite. Assim, os alunos até poderiam conseguir desenvolver a expressão $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, mas quanto tiveram de aplicar o limite quando h tende para zero, mesmo eu tendo enfatizado a forma de calcular o limite na explicação anterior, muitos ainda mostraram dúvidas sobre "o que fazer com o h". Tendo em conta a importância deste exercício, optei por dar mais tempo a todos os alunos, de modo a verificar se, mesmo os que costumam apresentar mais dificuldades, estavam a conseguir resolver o exercício. Em seguida uma aluna foi ao quadro apresentar a sua resolução para que, mesmo os alunos que não conseguiram concluir, tivessem o exercício completo e correto registado nos seus cadernos.

Finalmente indiquei aos alunos outras propostas do manual, para que resolvessem autonomamente até terminar a aula. Apesar de estas últimas questões não terem sido apresentadas no quadro, considero que os objetivos da aula foram totalmente atingidos, pois estas questões eram apenas de consolidação e ao longo da aula já tinham sido feitos exercícios semelhantes. Pessoalmente, fiquei bastante satisfeita com esta aula, tanto pela participação e motivação dos alunos, como por ter demonstrado um maior controlo e organização pessoal.

3.6.4. 4.ª aula: 02 de março de 2015

Esta aula (Anexo 1.4.) sucedeu no mesmo dia da aula anterior, apenas com a hora de almoço entre as duas. Além disso no tempo letivo imediatamente anterior funcionava o apoio da disciplina no qual alguns dos alunos estiveram presentes. Desta forma, cerca de metade da turma, antes do início desta aula, já tinha tido três tempos de Matemática e iria ter mais três, uma vez que depois da aula em questão ainda funcionava mais um tempo de apoio. Assim, no início da aula estava bastante preocupada com o comportamento dos alunos, uma vez que por norma esta aula de segunda-feira costuma ser muito agitada, mesmo sem todas estas mudanças. No entanto, os meus receios foram infundados uma vez que a aula correu bastante bem e os alunos mostraram-se empenhadíssimos.

A aula começou com uma tarefa de exploração intitulada "Derivando ponto a ponto" (Anexo 2.3.) de resolução com recurso à calculadora gráfica. Ao longo do trabalho autónomo ocorreram alguns problemas com o recurso, uma vez que as calculadoras de muitos não estavam a selecionar os pontos por eles pedidos. No entanto, com o auxílio da orientadora cooperante conseguimos descobrir onde residia o problema e todos os alunos puderam realizar a tarefa facilmente.

Em seguida dei início à discussão oral, que correu bastante bem uma vez que os alunos estavam muito motivados. Na questão final, após escrever no quadro a expressão pretendida, tentei questioná-los de forma que eles concluíssem que, uma vez que a cada x a derivada da função x^2 faz corresponder um valor, a própria derivada é uma função. No entanto, com excepção de alguns alunos, a maioria pareceu não perceber essa relação. Apercebi-me neste momento que a generalidade dos alunos não recorda a definição de função, limitando-se a decorar uma série de procedimentos para as estudar.

No final deste momento dei então a definição formal de derivada enquanto função e em seguida fiz a demonstração algébrica da derivada de uma função do tipo $ax^2, a \neq 0$, dando posteriormente um outro exemplo que não a função x^2. Ainda antes de proceder à demonstração formal questionei os alunos sobre a expressão que pensavam corresponder à derivada de uma função deste tipo, ao que alguns deles de imediato responderam $2ax$, o que demonstra uma boa intuição matemática e além disso revela, mais uma vez, o à vontade dos alunos em sala de aula, não tendo medo de errar.

Em seguida introduzi as funções derivadas da função afim (incluindo a derivada da função constante) e das funções polinomiais de 2.º e 3.º graus completas. Esta abordagem foi feita sempre da mesma forma, primeiro um exemplo e depois a generalização e penso que este momento foi muito bem conseguido uma vez que os alunos intuíram facilmente todas as derivadas.

Após este momento deu-se início ao trabalho autónomo dos alunos, que realizaram algumas questões do manual sobre as várias regras de derivação. Este momento foi até algo caricato uma vez que eram 16h30 da tarde, faltavam 20 minutos para o final da aula e os alunos ficaram extraordinariamente entusiasmados com os exercícios, trabalhando afincadamente. Este entusiasmo foi consequência, no meu ponto vista, do facto de os alunos pensarem que para calcular derivadas teriam sempre de recorrer ao limite e neste momento terem percebido que existem regras que podem utilizar. Muitos alunos chegaram até a perguntar-me "é só isto?.. não pode ser!" e alguns afirmaram que "esta é a matéria mais fácil de sempre" e "a Matemática devia ser sempre assim". Tive inclusive de indicar mais exercícios do que os que estavam planificados, uma vez que os alunos terminaram muito rapidamente. O momento posterior de apresentação dos resultados acabou por ser quase uma formalidade e uma oportunidade para os alunos que habitualmente não participam tanto irem ao quadro.

Apesar de algum barulho no final da aula, penso que esta aula foi das mais bem conseguidas, uma vez que tanto pelo horário e pela carga horária da disciplina nesse dia, como pelo facto de os alunos saberem que estes conceitos só iriam ser avaliados no período seguinte, nunca pensei que reagissem tão bem e que aula fosse tão produtiva. Considero assim que os objetivos desta aula foram totalmente atingidos dado que os alunos realizaram aprendizagens significativas no âmbito da derivada enquanto função e das regras de derivação.

3.6.5. 5.ª aula: 04 de março de 2015

Esta aula (Anexo 1.5.) teve um carácter especial uma vez que a segunda metade foi dedicada exclusivamente ao esclarecimento de dúvidas para a ficha de avaliação que seria na aula seguinte.

Uma vez que os alunos sabem que na aula imediatamente anterior ao teste podem esclarecer as suas dúvidas, assim que viram o sumário começaram a protestar sobre o porquê de dar ainda mais "matéria nova". No entanto, expliquei-lhes que seria uma nova regra bastante rápida e escrevi no quadro a função $\frac{1}{x}$ dizendo-lhes que íamos calcular a sua função derivada por definição. Verificaram-se algumas dificuldades pois, de uma forma geral, a substituição na função de x por $x + h$ é problemática para os alunos e o facto de x estar em denominador tornou ainda mais complicada esta manipulação. No entanto, após algum tempo a maioria dos alunos conseguiu chegar à expressão correta e uma aluna foi ao quadro apresentar a sua resolução.

Passei então à generalização da derivada das funções racionais do tipo $\frac{b}{x}, b \neq 0$, que os alunos de imediato intuíram. Em seguida introduzi, de forma semelhante à aula anterior (primeiro com um exemplo e depois com a generalização) a função derivada das funções racionais do tipo $\frac{b}{(x-c)}$ e $a + \frac{b}{(x-c)}, b \neq 0$. Mais uma vez estas regras de derivação foram aceites com bastante facilidade por parte dos alunos, existindo mesmo uma aluna que me perguntou se $-\frac{1}{x^4}$ era a derivada da função $\frac{1}{x^2}$.

Após os alunos registarem as regras, indiquei-lhes que deveriam fazer três questões do manual. Apesar de alguns já estarem a tentar tirar dúvidas para o teste e outros estarem distraídos uma vez que iam ter teste de Português na aula seguinte, a maioria realizou os exercícios pedidos rapidamente e sem dificuldades, reafirmando que com as regras "é tudo mais fácil". Num dos exercícios pedidos, voltei a selecionar apenas algumas alíneas mas muitos alunos acabaram por realizar todo o exercício. Em seguida alguns alunos foram ao quadro apresentar as suas resoluções mas a maioria dos colegas, que já tinha realizado corretamente os exercícios, não prestou muita atenção.

Tendo em conta que já faltavam menos de 45 minutos para o final da aula, optei por não insistir mais nestes conteúdos e dei então início ao esclarecimento de dúvidas. Neste momento os alunos puderam contar não só comigo como com a orientadora cooperante e a minha colega de estágio, o que facilitou bastante a gestão das solicitações.

De uma forma geral, apesar do desinteresse de alguns alunos na parte inicial, a aula correu bem e os objetivos foram atingidos. Relativamente à minha prestação, penso que consegui lidar bem com a desmotivação de alguns alunos, uma vez que foi uma aula "especial" e apesar de procurar "chamá-los" para a aula várias vezes, consegui não perder o foco nem ficar demasiado frustrada com quem não estava a prestar atenção.

3.6.6. 6.ª aula: 06 de março de 2015

Nesta aula (Anexo 1.6.), os alunos realizaram uma ficha de avaliação sumativa relativa aos conteúdos lecionados até à data.

3.6.7. 7.ª aula: 09 de março de 2015

Esta aula (Anexo 1.7.) iniciou-se com a resolução da Ficha de Trabalho n.º 1 (Anexo 2.4.) com o objetivo de consolidar as aprendizagens anteriores, nomeadamente as regras de derivação. Tendo em conta o tempo disponível e a similaridade de algumas das tarefas que constituíam a ficha optei por selecionar apenas algumas delas para serem resolvidas em aula. Assim, após entregar a ficha, escrevi no quadro os exercícios que eram para realizar em aula e que consequentemente seriam discutidos no final. Penso que este momento não foi bem conseguido uma vez que, como já tinha entregue as fichas, os alunos deixaram de prestar atenção ao que eu estava a dizer e começaram de imediato a trabalhar. Acredito que este problema poderia ter sido resolvido se tivesse enfatizado mais a importância do que estava a dizer e marcado mais a minha posição, ao invés de apenas escrever no quadro. Apesar disso, ao circular pela sala fui relembrando o que tinha escrito de modo a que os alunos realizassem apenas o que foi pedido.

Neste início de aula os alunos estavam um pouco agitados, conversando ligeiramente mais do que habitual, no entanto, ao longo do trabalho autónomo a concentração deles foi melhorando e acabou por se tornar um momento bastante produtivo com a maioria da turma a trabalhar afincadamente.

Uma vez que os alunos estavam a demorar um pouco mais do que o previsto, e de modo a evitar dispersões, optei por intercalar os momentos de correção com o trabalho autónomo. Assim, sempre que me apercebia que a maioria da turma já tinha realizado uma tarefa, pedia a um aluno para ir ao quadro corrigir. Penso que esta foi uma decisão acertada uma vez que além de "poupar" tempo, permitiu, mesmo a quem não realizou as tarefas ou estava com dificuldades, contactar com a resolução e colocar as suas questões. Do ponto de vista pessoal não foi uma gestão fácil, uma vez que enquanto um aluno estava no quadro os outros continuavam a solicitar a minha presença para esclarecer dúvidas. No entanto, apesar de considerar que em alguns momentos tive dificuldade em acompanhar com total atenção o que estava a ser feito no quadro, penso que no geral consegui evitar erros e/ou corrigi-los. Tendo em conta o meu percurso, penso que foi uma evolução positiva uma vez que no início das aulas lecionadas neste ano, era para mim quase impossível conseguir acompanhar o que os alunos faziam no quadro e responder às solicitações individuais.

A segunda metade da aula teve como objetivo introduzir a função módulo e a noção intuitiva de "pontos angulosos". De modo a perceber se os alunos se recordavam da interpretação geométrica de derivada num ponto e para estimular a componente gráfica, projetei um ficheiro de GeoGebra com a função x^2 onde eram representadas as sucessivas retas tangentes em determinados pontos do gráfico da função e através do seu declive era construída a função derivada.

Em seguida projetei um outro ficheiro com a função $|x|$ e perguntei aos alunos se sabiam de que função se tratava. Apesar de nem todos identificarem a função, assim que referi que era a função módulo, todos pareceram recordar-se. Questionei-os então sobre a expressão que define a função à esquerda e à direita de 0 e a maioria indicou de imediato, por observação do gráfico, que eram respetivamente as retas de equação $y = -x$ e $y = x$. Seguidamente concluímos que a derivada destas respetivas funções era sempre -1 e 1 e projetei as sucessivas retas tangentes, de modo a que os alunos percebessem que para $x = 0$ não existe reta tangente ao gráfico. Os alunos pareceram compreender facilmente que, uma vez que aquele era o "ponto de mudança das retas" não havia reta tangente e portanto não havia derivada. Mostrei então o ficheiro que constrói a derivada a partir das sucessivas tangentes, realçando o facto de esta não existir para $x = 0$ e os alunos de imediato afirmaram que "tem de ser bola aberta". Indiquei-lhes então que estes pontos, onde não existe derivada, são chamados "pontos angulosos".

Defini então formalmente a última regra de derivação que os alunos tinham de saber, definido a função módulo por ramos e consequentemente a sua derivada também por ramos. Além disso desenhei o gráfico da função derivada para que os alunos o registassem nos seus cadernos.

De modo a consolidar a ideia de "pontos angulosos" projetei um outro ficheiro, semelhante aos anteriores, com uma função não derivável nos pontos de abcissa 2 e -2 e cuja expressão da derivada varia entre $y = 2x$ e $y = -2x$, mediante os valores da abcissa. Apesar de ser uma função desconhecida para os alunos, eles responderam muito bem a este momento, identificando facilmente a função derivada e os "pontos angulosos". Aproveitei então esta ocasião para dar a ideia de função diferenciável e não diferenciável que a maioria dos alunos pareceu compreender sem grandes dificuldades.

Penso que este momento com os ficheiros interativos de GeoGebra foi bastante bem conseguido, uma vez que permitiu enfatizar a dimensão gráfica do conceito de derivada. Além disso, estava com bastante receio do comportamento dos alunos, devido ao horário da aula e de esta introdução ser feita na segunda metade da mesma, mas estes responderam muitíssimo bem, mostrando-se motivados e participativos.

Indiquei então aos alunos que deveriam realizar a última tarefa da ficha, que trabalha justamente o conceito de função diferenciável num ponto, e dei-lhes alguns minutos para pensar. No entanto, uma vez que faltava pouco tempo para a aula terminar optei por fazer a tarefa em grande grupo. Assim, os alunos foram dizendo se cada uma das funções era ou não diferenciável para $x = 2$, o porquê da sua resposta e além disso, para as diferenciáveis, indicaram o valor da derivada nesse ponto. O momento acabou por resultar bastante bem uma vez que a maioria dos alunos participou ativamente e pareceu compreender o conceito. No entanto, penso que poderia ter enfatizado mais algumas das justificações, de modo a que os alunos menos atentos e com mais dificuldades ficassem mais esclarecidos.

A aula foi então terminada, sendo cumprida toda a planificação. Desta forma, apesar de esta ter sido uma aula desafiante e com conceitos complexos, penso que os objetivos foram totalmente atingidos, tendo sido, na minha opinião, uma das aulas melhores conseguidas, especialmente a segunda parte.

3.6.8. 8.ª aula: 11 de março de 2015

A oitava aula (Anexo 1.8.) teve como finalidade introduzir a relação entre o sinal da função derivada e o sentido de variação e extremos relativos da função original. Tendo em conta a complexidade da relação e a necessidade de os alunos compreenderem a mesma com significado, ao invés de mecanizar uma série de procedimentos, a aula teve como base uma tarefa de exploração, a tarefa "Evolução das bactérias" (Anexo 2.5.)

A primeira parte da tarefa, com ênfase na visualização, correu bem com a maioria dos alunos a responder acertadamente às questões. No entanto, demoraram um pouco mais do que o esperado, não por não saberem responder, mas por me chamarem constantemente para validação das respostas. Desta forma, optei por dar início à discussão desta primeira parte onde foram corrigidas oralmente as duas primeiras questões.

Na segunda parte da tarefa houve dificuldades inesperadas, nomeadamente no estudo do sinal da função derivada, uma vez que poucos alunos perceberam o objetivo do enunciado. Assim, foi extremamente comum ouvir alunos questionarem "o que é o estudo do sinal?" e "é ver se é crescente ou decrescente?", entre outras questões que demonstraram uma falta de entendimento do pretendido. Após responder algumas vezes que deviam calcular os zeros da derivada e em seguida identificar os intervalos em que a mesma é positiva ou negativa e tendo em conta que o tempo gasto tinha já ultrapassado o previsto, optei por solicitar a uma aluna que fosse ao quadro resolver esta questão, mesmo sem muitos dos colegas terem terminado. Desta forma, a aluna estudou o sinal da derivada com todos os cálculos no quadro e em seguida questionei a turma sobre a relação entre os dados obtidos nesta e nas duas primeiras questões da tarefa. Apesar de não terem calculado autonomamente os zeros, os alunos identificaram de imediato a relação existente, compreendendo que, por um lado, tinham feito um estudo gráfico da derivada e, por outro, um estudo analítico.

Em seguida dei mais algum tempo para os alunos conjeturarem a relação entre o sinal da função derivada e o sentido de variação e extremos relativos da função original (dividida em duas questões). Deste modo, após toda a turma ter respondido à quarta questão, que relaciona o sinal da função derivada com o sentido de variação da função original, pedi a um aluno, dos vários que se voluntariaram, para me dizer a relação que conjeturou e escrevi-a no quadro. Questionei a turma sobre a relação a que todos tinham chegado, enfatizando a necessidade de utilizar os termos matemáticos corretos, uma vez que muitos dos alunos confundiram as terminologias dizendo "se a derivada é positiva a função sobe" e outras expressões semelhantes.

Projetei então um quadro com a formalização desta relação que os alunos registaram. Finalmente, discutimos a última questão que relaciona os zeros da derivada com os extremos da função original, sendo que os alunos concluíram que os zeros da derivada correspondiam aos extremos da respetiva função.

Nesta fase introduzi, através de ficheiros de GeoGebra, dois exemplos que contrariam esta conjetura, a função$|x|$, cuja derivada muda de sinal sem, no entanto, ter zeros e a função x^3 que é sempre crescente apesar de a derivada ter um zero. Estes exemplos tiveram como objetivo mostrar aos alunos que nem sempre os zeros da derivada correspondem aos extremos da função original, sendo necessário que a derivada mude de sinal. Penso, no entanto, que este momento não foi bem conseguido, uma vez que os alunos se mostraram muito confusos com os exemplos, parecendo não assimilar bem as diferenças entre eles. Após explicar novamente, acabei por considerar melhor projetar o quadro síntese onde estavam estas informações para que eles pudessem registar e em seguida entreguei-lhes uma ficha onde constavam todos os exemplos dados referindo que eles deveriam ler com calma e atenção em casa e caso houvessem dúvidas discutiríamos na aula seguinte.

Indiquei então os exercícios que seriam realizados em seguida e os alunos iniciaram o trabalho autónomo. No primeiro exercício os alunos não revelaram muitas dificuldades em perceber que deviam aplicar a relação entre o sinal da função derivada e o sentido de variação da função original. No entanto, a análise que tinham de fazer da representação gráfica de uma função e da sua função derivada mostrou-se bastante problemática, uma vez que os alunos não sabiam que informações usar. Neste momento fui bastante solicitada, o que acabou por gastar mais tempo que o previsto mas apesar disso pude verificar que, com mais ou menos dificuldades, a maioria dos alunos chegou à relação pretendida. Um aluno foi então ao quadro fazer a correção e no final aproveitei para enfatizar mais uma vez a relação em questão e a importância de construírem corretamente o quadro de sinal da derivada.

Após este momento, os alunos voltaram ao trabalho autónomo na resolução do exercício seguinte. Ao circular pela sala verifiquei que estavam com muitas dificuldades em compreender que procedimentos deveriam realizar para estudar o sentido de variação das funções em questão. Uma vez que faltava pouco tempo para o final da aula e os alunos pareciam não estar a evoluir nas questões optei por fazer uma explicação para a turma, sendo eu a realizar a primeira alínea do exercício em questão. Deste modo, expliquei detalhadamente a forma como deveriam proceder e o tipo de resposta que deveriam dar nestes casos, questionando os alunos ao longo de todo o momento. Considero que, apesar de não estar planeada, esta decisão acabou por ser a melhor alternativa uma vez que os alunos pareceram ficar mas conscientes dos objetivos do exercício e da própria relação.

Penso que, apesar de a planificação ter sido praticamente cumprida, os objetivos da aula não foram totalmente atingidos uma vez que alguns alunos pareceram não compreender a relação entre os zeros da derivada e os extremos da função original. Além disso, penso que no momento da sistematização poderia ter explorado os exemplos de forma diferente, promovendo assim uma melhor compreensão da relação pretendida.

3.6.9. 9.ª aula: 13 de março de 2015

A aula (Anexo 1.9.) iniciou-se com a correção do trabalho de casa. Apesar de por norma o trabalho de casa só ser corrigido se os alunos manifestarem dúvidas generalizadas, nesta aula optei por corrigir, detalhadamente, todos os exercícios uma vez que os alunos ainda tinham um contacto limitado com a relação entre o sinal da função derivada e o sentido de variação e extremos da função original e aparentaram algumas dificuldades na aula anterior.

Desta forma os alunos que se voluntariam foram ao quadro corrigir cada uma das alíneas em questão e no final de cada uma delas fiz uma pequena explicação para a turma. Na minha opinião este momento não foi bem conseguido uma vez que muitos dos alunos não tinham feito o trabalho em casa e portanto ou estavam a copiar do quadro sem compreender o significado do que estava a ser feito ou estavam a trabalhar autonomamente não prestando atenção às explicações dadas. Assim, pareceu-me que a maioria da turma não retirou grandes aprendizagens deste momento e penso que eu poderia ter alterado isso, dinamizando mais esta fase da aula e questionando mais os alunos em geral e não apenas os que estavam a apresentar as suas resoluções. Além disso, do ponto de vista dos conteúdos, poderia ter enfatizado mais a importância de alguns detalhes, nomeadamente o porquê de incluirmos os pontos não definidos no domínio de uma função e da sua derivada no quadro de sinal, entre outros.

Findo este momento, que acabou por ocupar mais tempo do que o previsto, dei início à segunda parte da aula onde os alunos realizaram algumas questões da Ficha de Trabalho n.º 2 (Anexo 2.6.) com o objetivo de consolidar a relação entre o sinal da função derivada e o sentido de variação e extremos da função original e além disso permitir-me iniciar a recolha de dados para o estudo no qual este trabalho de cariz investigativo se baseia.

Tendo em conta que nem todas as questões da ficha iam ser resolvidas e uma vez que já tinha a experiência de aulas anteriores optei por, antes de entregar a ficha, chamar a atenção para as tarefas que deveriam realizar em sala de aula, registando a sua numeração no quadro. Penso que esta foi a decisão correta uma vez que os alunos prestaram bastante atenção e ao longo do trabalho autónomo pude verificar que estavam a fazer apenas as tarefas que indiquei.

Após entregar a ficha os alunos começaram de imediato a trabalhar. Uma vez que se tinham mostrado pouco à vontade na relação entre o sinal da função derivada e o sentido de variação e extremos da função original durante a correção do trabalho de casa, fiquei bastante surpreendida com a reação dos alunos à primeira questão, cujo objetivo era estudar analiticamente a variação e extremos de uma função.

Deste modo, a maioria dos alunos compreendeu instantaneamente o que deveriam fazer, reconhecendo de imediato que teriam de derivar a função e calcular os seus zeros. Uma vez que os zeros da derivada eram números irracionais optei por indicar no quadro o seu valor. Assim, como grande parte dos alunos estava a ter alguns problemas na racionalização do denominador, interrompi a aula e realizámos este processo em grande grupo, de modo a que todos pudessem ter os mesmos valores nos zeros, não gastando grande tempo com esse procedimento, uma vez que não era esse o objetivo. Penso que esta foi uma decisão acertada, tanto para me permitir ter mais tempo para a recolha de dados como para a própria aprendizagem dos alunos no âmbito dos conteúdos desta aula.

Em seguida os alunos avançaram nas suas resoluções sendo que a maioria respondeu acertadamente à questão, evidenciando conhecer e saber aplicar a relação entre o sinal da função derivada e o sentido de variação e extremos da função original.

As duas tarefas seguintes foram problemas de otimização. Apesar de na questão 2.(a) os alunos evidenciarem bastantes dificuldades em definir uma variável em função de outra e em compreender o próprio enunciado, considero que o trabalho autónomo neste momento correu bem, uma vez que a maioria resolveu os problemas facilmente aplicando os conhecimentos necessários.

Uma vez que esta aula tinha como finalidades consolidar a relação entre uma função e a sua derivada e a resolução de problemas de otimização, penso que os objetivos foram praticamente atingidos, apesar do incumprimento da planificação a nível de tempos. Embora a aula não tenha começado da melhor forma, penso que a segunda metade foi bastante produtiva e os alunos mostraram-se muito empenhados em resolver as questões indicadas. Do ponto de vista pessoal, penso que consegui colmatar algumas falhas das aulas anteriores, no entanto, o momento da correção do trabalho de casa não foi bem gerido o que levou a algum desinteresse por parte dos alunos.

3.6.10. 10.ª aula: 16 de março de 2015

Uma vez que na aula anterior nem todos os alunos tinham terminado a resolução dos problemas de otimização, iniciei esta aula (Anexo 1.10.) dando algum tempo para concluírem o problema 4, sendo que os alunos que já tinham terminado iniciaram a resolução da questão 5 da Ficha de Trabalho n.º2 (Anexo 2.6.). Tal como na aula anterior, os alunos não mostraram grandes dificuldades em compreender o objetivo do problema, no entanto, revelaram, mais uma vez, falta de destreza nos cálculos, o que consumiu algum tempo.

Em seguida dei então início à discussão dos resultados onde alguns alunos, voluntariamente, foram ao quadro apresentar a resolução de cada uma das questões. Neste momento a restante turma mostrou-se atenta à explicação dos colegas e à minha intervenção. No entanto, preocupei-me demasiado em chamar a atenção para a necessidade de responder aos problemas tendo em conta o contexto e acabei por negligenciar informações importantes como o facto de terem de justificar de que forma identificaram o sinal da derivada (analiticamente ou através da calculadora) e mais uma vez não enfatizei o significado dos valores que se incluem no quadro de sinal da derivada.

O momento seguinte foi dedicado à resolução, em grande grupo, da questão 3 da ficha. Assim, para cada uma das quatro figuras apresentadas, um aluno justificou se poderia ou não representar uma função e a respetiva derivada. Os alunos que se voluntariaram não mostraram grandes dificuldades e responderam acertadamente, no entanto, penso que em seguida, quando reforcei algumas das ideias principais, poderia ter procedido de outra forma, nomeadamente com mais calma e focando algumas ideias que pensei que estivessem claras para todos. Desta forma penso que, apesar de o balanço deste momento ser positivo, poderia tê-lo conduzido de outra forma especialmente porque foi muito rápido, o que poderá não ter permitido que todos os alunos compreendessem o que estava a ser feito.

Terminado este momento, entreguei a tarefa "A População da Urbanização" (Anexo 2.7.) que os alunos resolveram autonomamente. Segundo a planificação deveria ainda ter realizado tarefas do manual, no entanto, uma vez que o tempo disponível já não era suficiente, optei por entregar esta tarefa tendo em conta a recolha de dados que precisava de fazer para o estudo já anteriormente definido.

Deste modo os alunos começaram a trabalhar bastante motivados, embora sentindo algumas dificuldades nas duas últimas questões. Estas dificuldades já estavam previstas na planificação, nomeadamente o facto de os alunos não conseguirem interpretar o enunciado e os resultados obtidos no contexto do problema, no entanto, estes obstáculos foram mais condicionantes do que estava à espera e os alunos acabaram por ocupar todo o tempo final da aula nesta tarefa.

Uma vez que o objetivo desta aula era consolidar alguns dos tópicos lecionados anteriormente, penso que o mesmo não foi totalmente atingido por falta de tempo. Pessoalmente, alguns dos momentos deixaram-me bastante insatisfeita, uma vez que cometi erros recorrentes tanto a nível da discussão dos primeiros problemas, como na resolução em grande grupo. Apesar disso, o balanço geral da aula é positivo dado que os alunos mostraram, na sua maioria, facilidade em aplicar os conteúdos já abordados, trabalhando de forma empenhada.

3.6.11. 11.ª aula: 18 de março de 2015

Esta aula (Anexo 1.11.) foi iniciada com a discussão dos resultados da tarefa "A População da Urbanização" (Anexo 2.7.). As duas primeiras questões foram apresentadas no quadro, cada uma por um aluno e em seguida enfatizei a importância da interpretação dos resultados no contexto do problema, bem como o significado da taxa de variação em cada um dos anos referidos. Os alunos mostraram-se algo dispersos, estando a maioria bastante cansada e apática, preocupando-se com um trabalho final de outra disciplina que teriam de entregar nesse dia. Aliás, nesta data foi registado o menor número de presenças do ano na aula de Matemática, sendo que não estiverem presentes sete alunos que, segundo os colegas, ainda estavam a terminar o referido trabalho.

Assim foi bastante difícil motivá-los nesta fase inicial da aula, pelo que tive de tomar uma atitude um pouco mais severa mostrando-lhes que se estavam na aula

Matemática deveriam trabalhar nos conteúdos da mesma e não noutras disciplinas. Esta postura pareceu resultar e os alunos mostraram-se bastante atentos na discussão da última questão. Uma vez que esta era uma alínea de carácter particular com um enunciado mais aberto do que estão habituados e que em consequência existiram várias resoluções, optei por selecionar três alunos para irem ao quadro, um de cada vez, apresentarem as suas conclusões. Optei por estas três resoluções pois em conjunto constituíam uma resposta muito completa ao problema apresentado. Apesar disso, a última resolução apresentada (a mais completa de todas) era suficiente e aquilo que esperava que eles fizessem quando elaborei esta questão, pelo que no final das apresentações expliquei-lhes justamente isso, enfatizando a estratégia mais eficaz para responder a um problema deste tipo.

Em seguida dei início à resolução, em grande grupo, de uma tarefa do manual com o propósito de apresentar aos alunos a relação entre a derivada de uma função que fornece a distância em função do tempo de um determinado objeto, com a velocidade do mesmo. Deste modo, após relembrar a fórmula da velocidade média tendo em conta a distância percorrida e o tempo gasto, relacionei a mesma com a taxa média de variação. Os alunos pareceram compreender bem o significado do que estava a explicar e mostraram-se muito participativos, o que tornou este um momento bastante produtivo. Quanto a mim, penso que geri bem esta parte da aula, motivando os alunos e dando tempo para que todos compreendessem o que estava a ser feito e colocassem as suas dúvidas.

Dei então início à última fase da aula, referindo aos alunos que iriam realizar mais uma ficha de trabalho (Ficha de Trabalho n.º 3, Anexo 2.8.). Indiquei de imediato que deveriam começar pelos problemas 1 e 3 sendo que se houvesse tempo avançariam então para os outros. A estratégia de mais uma vez indicar primeiro os problemas a serem feitos e só depois entregar a ficha voltou a resultar muito bem, sendo que todos os alunos respeitaram o que foi dito e começaram por estes.

Apesar da desmotivação no início da aula, os alunos mostraram-se extremamente empenhados neste momento. Circulei pela sala respondendo a algumas solicitações, sendo que as dúvidas dos alunos foram, na sua maioria, as já antecipadas na planificação.

De uma forma geral, apesar de o início não ter sido muito produtivo, penso que esta aula correu bem e que os objetivos foram cumpridos. A nível pessoal, sinto que consegui gerir bem a desmotivação dos alunos e impor-me quando necessário e, ao mesmo tempo, consegui dinamizar a aula de uma forma produtiva.

3.6.12. 12.ª aula: 20 de março de 2015

Esta foi a aula final do 2.º Período e consequentemente a última do conjunto de aulas que lecionei (Anexo 1.12.). Tendo em conta este facto, teve características muito especiais, sendo que além de funcionar como uma aula de trabalho autónomo para que pudesse recolher o máximo de dados possível da Ficha de Trabalho n.º 3 (Anexo 2.8.), os alunos estavam já bastante agitados, pensando nas férias. Mais, uma vez que era a data final de inscrições nos exames e muitos tinham deixado a sua para esse dia, alguns alunos faltaram enquanto outros saíram e entraram da sala indo frequentemente à secretaria ver se já estava na sua vez. Finalmente foi ainda aula de autoavaliação, pelo que o segundo tempo letivo foi dedicado ao preenchimento das fichas de avaliação pessoal.

A aula acabou por decorrer de uma forma muito relaxada sem momentos muito marcados, o que não teve como consequência a falta de trabalho dos alunos. Pelo contrário, os alunos presentes trabalharam bastante, realizando as tarefas que lhes propus e alguns até mais, e mesmo após preencherem as fichas de autoavaliação, voltaram a concentrar-se na ficha e a tentar terminar os problemas nos minutos finais da aula. Ao longo de todo o trabalho autónomo os alunos não evidenciaram dificuldades diferentes das já antecipadas e o ritmo de trabalho foi, tendo em conta as condicionantes, bastante satisfatório.

À hora marcada dei por encerrada a aula e penso que, apesar de tudo, os objetivos da mesma foram cumpridos.

Capítulo 4

Métodos e procedimentos de recolha e análise de dados

4.1. Opções Metodológicas

Tendo em conta o objetivo do meu estudo e as características inerentes à realização do mesmo, onde fui investigadora e professora em simultâneo, foi para mim bastante evidente seguir uma metodologia qualitativa e interpretativa. Assim, considero que o objetivo do meu estudo se enquadra no paradigma interpretativo, uma vez que a sua palavra-chave é *compreender*, sendo a construção de significados por parte dos alunos um aspeto essencial do mesmo, o que se relaciona com este paradigma. As noções científicas de explicação, previsão e controlo do paradigma positivista são substituídas neste paradigma pelas de compreensão, significado e ação (Coutinho, 2013). Além disso, tendo em conta as características de uma investigação interpretativa e qualitativa definidas por Bogdan e Biklen (1994) considero que as opções metodológicas que tomei estão adequadas uma vez que: (i) a recolha de dados foi feita no ambiente natural dos participantes e enquanto investigadora fui o principal elemento nessa recolha; (ii) os dados recolhidos baseiam-se nas resoluções dos alunos e assumem uma natureza essencialmente descritiva; (iii) o objetivo foi estudar os processos inerentes ao raciocínio dos alunos e não apenas os resultados ou produtos; (iv) tendo em conta que não formulei previamente nenhuma hipótese à qual pretendia dar resposta, os dados foram analisados de uma forma indutiva; e (v) a compreensão dos significados construídos pelos alunos é de importância vital no estudo, tal como já referi.

4.2. Participantes

A seleção dos participantes é um fator crucial para o desenvolvimento do estudo, especialmente quando este assume um carácter qualitativo. A investigação foi realizada na turma de 11.º ano onde lecionei a unidade de ensino “Taxa de Variação e Derivada”. Toda a turma participou no estudo, sendo que recolhi e analisei dados dos 25 alunos que a constituem. Esta minha opção prendeu-se com o facto de a turma ser bastante heterogénea permitindo-me descrever realidades múltiplas, o que, segundo Bogdan e Biklen (1994), constituiu um dos objetivos da investigação qualitativa e interpretativa.

De realçar que, por questões éticas, para realizar este estudo foram pedidas autorizações aos encarregados de educação dos alunos, à diretora de turma, à coordenadora do Departamento de Matemática e à direção da escola (Anexo 4). Além disso, na análise de dados, os nomes dos alunos serão salvaguardados, através do uso de pseudónimos.

4.3. Métodos de recolha de dados

A recolha de dados foi feita por mim, na sala de aula. Os principais métodos de recolha de dados utilizados para desenvolver este estudo tiveram em conta o objetivo do mesmo e o seu carácter qualitativo. Assim, os métodos que utilizei foram a observação de aulas e a recolha documental.

4.3.1. Observação de aulas

Dado que este estudo tem por base a unidade de ensino "Taxa de Variação e Derivada" que lecionei na turma referida, o meu papel foi de investigadora e professora em simultâneo, pelo que esta investigação exigiu uma observação participante. A observação participante implica a inserção do investigador no seio da população a investigar para registar comportamentos, interações ou acontecimentos, envolvendo-se nas atividades que está a estudar (Evalsed, 2009, citado em Silva, 2012). Uma vez que os significados dados pelos próprios atores, neste caso os alunos, são centrais no estudo que desenvolvi, este método torna-se especialmente adequado (Jorgensen, 1990).

Assim, além de procurar prestar atenção a todas as reações dos alunos ao longo da unidade de ensino, em especial nas aulas referentes à recolha de dados, sempre que me foi possível fui realizando pequenas anotações. Obviamente estes registos não foram efetuados de forma sistemática e constante pois o papel de professora sobrepôs-se ao de investigadora. No entanto, no final de cada aula elaborei notas de campo bastante completas, procurando englobar todas as situações relevantes. Segundo Coutinho (2013), as notas de campo podem ser de dois tipos: descritivas e reflexivas, sendo que as primeiras se relacionam com a descrição dos factos enquanto as segundas se prendem com a análise dos acontecimentos. Tendo em conta a natureza deste estudo e a sua ligação com a prática de ensino supervisionada, recorri a estes dois tipos para maximizar as informações disponíveis.

Segundo Bogdan e Biklen (1994) a presença do investigador modifica o comportamento dos participantes, pelo que não posso excluir a hipótese de que, ao longo das aulas relativas à recolha de dados, algumas das reações tenham sido condicionadas por este meu novo papel. No entanto, uma vez que a turma já estava muito familiarizada comigo enquanto professora, acredito que o "efeito do observador" foi minimizado pela empatia e confiança estabelecidas ao longo do ano letivo.

4.3.2. Recolha documental

A recolha documental foi um método central para o estudo que realizo. Assim, as questões de investigação que desenvolvi serão respondidas em grande parte pelas informações encontradas nas produções escritas dos alunos. De modo a compreender as estratégias utilizadas pelos alunos na resolução de problemas de otimização, que conhecimentos evidenciam sobre a derivada de uma função e fazer uma análise geral das suas principais dificuldades, recolhi todas as resoluções efetuadas neste âmbito. As aulas dedicadas à recolha de dados decorreram no final da unidade de ensino, durante quatro blocos de noventa minutos. Estas aulas foram dedicadas principalmente ao trabalho autónomo dos alunos, havendo lugar a algumas discussões coletivas. Durante este período de aulas, os alunos não resolveram apenas problemas de otimização, tendo sido realizadas outras tarefas englobando os tópicos lecionados ao longo de toda a unidade. Esta foi uma escolha consciente, justamente para que os alunos não entrassem num ritmo mecanizado, sendo que procurei ao máximo que cada problema fosse encarado como um novo desafio. Os alunos foram inicialmente avisados que deveriam justificar todas as suas resoluções e caso sentissem necessidade de corrigir alguma coisa o deveriam fazer sem apagar o que já tinham feito, modalidade à qual estes aderiram de imediato. Além disso, procurei não discutir exaustivamente todos os problemas de modo a não condicionar as estratégias dos alunos e respetivas resoluções. No entanto, tendo em conta as aprendizagens visadas para a turma e a minha própria investigação onde tenho todo o interesse em analisar a evolução dos alunos, foram discutidas as resoluções dos problemas iniciais.

4.4. Análise de dados

Após a recolha de dados procedi à sua análise, procurando dar resposta às questões deste estudo. Na análise apoiei-me essencialmente na recolha documental pois, só por si, forneceu elementos relevantes para o problema em estudo. Obviamente, de modo a compreender o porquê de determinada resolução, socorri-me das notas de campo efetuadas ao longo da unidade de ensino. Assim, realizei uma análise qualitativa das produções escritas de seis problemas de toda a turma, sendo o carácter da análise essencialmente descritivo e interpretativo. Para a seleção destes seis problemas tive em consideração dois critérios: (i) inicialmente, optei por problemas com características diversificadas, tanto ao nível do contexto como do tipo de funções envolvidas; (ii) numa fase posterior, procurei analisar a evolução dos alunos no decorrer das aulas e das discussões coletivas, pelo que os problemas finais têm algumas semelhanças com os iniciais.

Tendo em conta Bogdan e Biklen (1994), a análise de dados envolve a organização destes e divisão em unidades manipuláveis, e portanto a fase seguinte no estudo foi a organização dos dados. Neste sentido, as produções que recolhi foram organizadas por tarefa e por aluno. Posteriormente dei início à procura de padrões, elaborando quadros preliminares de modo a distinguir as diferentes resoluções, nomeadamente no que se refere às estratégias usadas.

Uma vez que este estudo implica a resolução de problemas, achei conveniente organizar a análise com base no modelo desenvolvido por Pólya (1957/2004). Assim, numa primeira fase procurei encontrar evidências relativas à compreensão do problema por parte dos alunos. Além de eventuais registos escritos, a minha análise desta fase baseou-se também nas minhas notas de campo no que se refere, por exemplo, a eventuais dúvidas que os alunos me tenham colocado e à perspetiva geral com que fiquei ao longo da resolução.

A fase seguinte da resolução de um problema é a elaboração do plano. Esta relaciona-se com a dimensão heurística, remetendo essencialmente para a atividade mental dos alunos, isto é, para forma como estes pensaram em abordar o problema. Uma vez que, tendo em conta as características desta investigação, não me foi possível questionar todos os alunos sobre o plano em que pensaram, esta fase e, consequentemente, a dimensão heurística não foram contempladas na análise de alguns problemas. Assumi assim que, a menos que os alunos tenham registado nas suas produções alguma estratégia da qual em seguida abdicaram, o plano que elaboraram inicialmente foi o que executaram.

A terceira fase é justamente a execução do plano. Nesta, organizarei os dados segundo a estratégia elaborada pelos alunos e procurei analisar a forma como utilizaram, ou não, os recursos, isto é, os seus conhecimentos sobre conceitos matemáticos e procedimentos adquiridos ao longo da escolaridade. Uma vez que a tecnologia foi uma das apostas para a unidade de ensino, tive particular atenção ao uso da calculadora gráfica, pelo que as estratégias foram também subdividas consoante os alunos recorreram, ou não, a esta ferramenta.

Finalmente a última etapa da resolução de um problema é a análise retrospetiva. Aqui, o meu objetivo principal foi perceber de que forma os alunos responderam ao problema colocado. Assim, dado que a maioria dos problemas é contextualizada, tive uma preocupação especial em verificar se os alunos responderam, ou não, de acordo com o contexto e indicaram todas as informações necessárias para responder à questão colocada (explicita ou implicitamente) no enunciado. Além disso, recorri a partes da resolução dos alunos de modo a perceber se tiveram em conta o contexto enquanto realizavam os procedimentos matemáticos, por exemplo, na construção do quadro de sinal da derivada. De notar que nenhuma das fases de resolução de problemas é independentemente das anteriores, pelo que, de modo a tentar compreender o que poderá ter estado na origem de determinada resposta recorri, por vezes, a fases anteriores.

De modo a facilitar a percepção das aprendizagens realizadas e das dificuldades manifestadas pelos alunos, ao longo de cada uma das fases, principalmente na execução do plano e análise retrospetiva, procurei apresentar resoluções com diferentes níveis de desempenho, evidenciando raciocínios corretos, parcialmente corretos e incorretos.

No final da análise de cada problema fiz uma pequena síntese, focando os fatores de principal interesse, nomeadamente, a(s) estratégia(s) mais utilizada(s) e as principais aprendizagens e dificuldades. Além disso, sempre que possível, fiz a comparação de um problema com os anteriores, de modo a verificar a evolução das resoluções.

Capítulo 5

Análise de dados

Neste capítulo analisarei as produções escritas dos alunos em seis problemas de otimização realizados ao longo das últimas aulas da unidade de ensino "Taxa de Variação e Derivada". Os problemas serão apresentados pela ordem por que foram realizados de modo a analisar a evolução dos alunos.

5.1. Problema 2.(b) da Ficha de Trabalho n.º 2

Esta foi a primeira tarefa problemática (Anexo 2.6.) apresentada aos alunos no contexto de problemas de otimização. O objetivo principal foi analisar como os alunos abordam um problema deste tipo e se recorrem ou não à relação entre o sinal da função derivada, sentido de variação e extremos da função original, lecionada nas aulas anteriores. Além disso, este problema servirá de base para a análise dos restantes no que se refere às capacidades de interpretação dos alunos e à forma como estes respondem ou não ao problema de acordo com o pretendido.

2. A Filipa pretende colocar no jardim da sua casa uma piscina retangular com 64 m^2 de área.

(a) Prova que o perímetro da piscina é dado pela expressão $P(x) = 2x + \frac{128}{x}$, onde x representa o comprimento da piscina, em metros.
(b) Determina as dimensões da piscina para que o seu perímetro seja mínimo.

Figura 10 - Tarefa 2 da Ficha de Trabalho n.º 2

Compreensão do problema

Uma vez que a tarefa é constituída por duas alíneas, sendo o problema a segunda, o primeiro contacto dos alunos com a situação apresentada foi na alínea (a). Nesta questão verificaram-se muitas dificuldades e a maioria dos alunos solicitou o meu apoio uma vez que não estava a conseguir encontrar a expressão indicada no enunciado. A resolução desta questão foi bastante demorada, no entanto, grande parte da turma acabou por chegar à equação dada, compreendendo o seu significado.

Ao iniciarem a resolução do problema de otimização os alunos já estavam familiarizados com o contexto em questão e, de imediato, começaram a procurar formas de determinar as dimensões mínimas da piscina.

Elaboração do plano

Apesar de os alunos compreenderem facilmente o objetivo do enunciado, como nunca tinham resolvido um problema de otimização deste tipo, a maioria sentiu algumas dificuldades em iniciar a sua resolução. Assim, muitos alunos discutiram entre si a forma como poderiam abordar o problema, sentindo-se inicialmente um pouco “perdidos”. Alguns chegaram a solicitar o meu apoio, questionando-me sobre a estratégia a seguir. Tal como habitualmente, e até tendo em conta o estudo que realizo, optei por não responder diretamente aos alunos, questionando-os apenas sobre os métodos que conhecem para determinar máximos e mínimos de funções. Após alguns minutos, a generalidade dos alunos pareceu encontrar uma estratégia adequada e iniciou a resolução do problema.

Execução do plano

Embora tenham sentido algumas dificuldades em elaborar o plano, todos os alunos perceberam que podiam abordar o problema através dos conhecimentos sobre derivadas e optaram por essa estratégia (Tabela 2).

Estratégia adotada	Nº de alunos (n=24)	% de alunos
Recorre à noção de derivada e utiliza a calculadora gráfica	20	83%
Recorre à noção de derivada e não utiliza a calculadora gráfica	1	4%
Não resolve	3	13%

Tabela 2- Tipo de estratégia utilizado pelos alunos na resolução do Problema 2.(b) da Ficha de Trabalho n.º 2

Os alunos começaram por derivar a função que representa o perímetro da piscina, recorrendo às regras de derivação, sendo que todos o fizeram corretamente. Em seguida, de modo a aplicar a relação entre o sinal da função derivada, o sentido de variação e extremos da função original, os alunos calcularam os zeros da função derivada. Uma vez que esta se tratava de uma função racional, grande parte dos alunos sentiu algumas dificuldades em resolver a equação, não sabendo como proceder com o denominador. Apesar das dificuldades e de demorarem um pouco mais de tempo do que o previsto, 12 alunos optaram por reduzir toda a expressão ao mesmo denominador e destes, nove enfatizaram que o denominador teria de ser diferente de zero (Figura 11) enquanto os outros três desconsideraram essa condição.

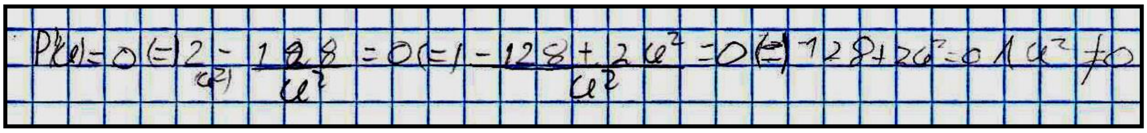


Figura 11 - Parte do cálculo dos zeros da função derivada do Problema 2.(b). da Ficha de Trabalho n.º 2, realizado pelo Henrique

Independentemente da forma como calcularam os zeros da função derivada, à exceção de dois alunos, todos concluíram que esta se anulava para $x = -8$ e $x = 8$. Os alunos em questão, o Nuno e a Mariana, ignoraram a duplicidade da raiz de 64, considerando apenas a raiz positiva (Figura 12).

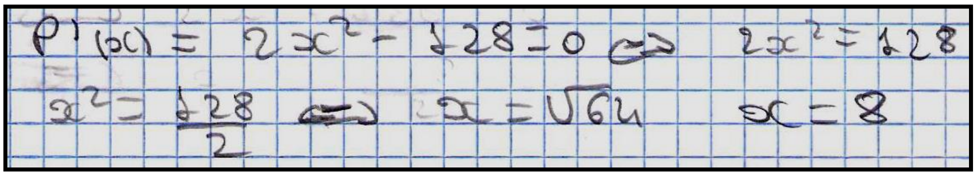


Figura 12- Cálculo dos zeros da função derivada do Problema 2.(b) da Ficha de Trabalho n.º 2, realizado pelo Nuno

O Nuno de imediato identificou 8 como sendo o valor do comprimento para o qual o perímetro da piscina é mínimo, mas não foi o único. Outros três alunos indicaram a resposta final excluindo o valor negativo. Tendo em conta que recorreram aos seus conhecimentos sobre derivadas, o facto de os alunos não terem verificado o sinal da função derivada revela que não se recordam dos exemplos em que, apesar de a derivada ter zeros, a função original não tem extremos. Assim, verifica-se que os alunos não desenvolveram aprendizagens sólidas neste âmbito, assumindo de imediato que os zeros da função derivada correspondem aos extremos da função original.

Todos os outros 18 alunos depois de calcularem os zeros da função derivada construíram um quadro de sinal para estudar o sinal da função derivada e o sentido de variação da função original. O facto de a maioria dos alunos compreender que necessita de estudar o sinal da função derivada para em seguida constatar o sentido de variação da função original revela que realizaram aprendizagens significativas neste âmbito.

Já no que se refere aos conhecimentos acerca do domínio de uma função racional grande parte dos alunos evidencia lacunas. Assim, além de apenas nove alunos terem incluído nas suas resoluções a condição $x^2 \neq 0$, destes apenas três incluem esta restrição no quadro de sinal, como por exemplo a Laura (Figura 13).

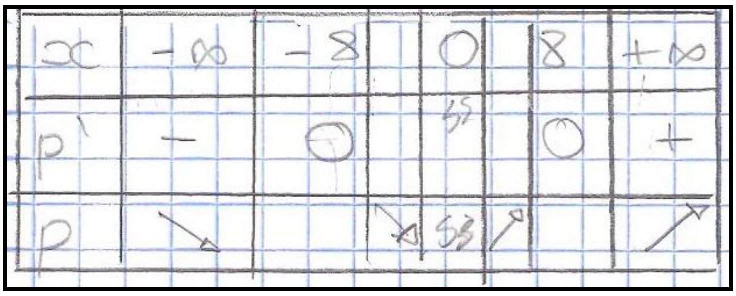


Figura 13 - Quadro de sinal da derivada construído pela Laura, na resolução do Problema 2.(b) da Ficha de Trabalho n.º 2.

De notar ainda que, apesar de terem referido que o denominador tem de ser diferente de zero ao resolverem a equação $P'(x) = 0$, apenas três alunos indicaram expressamente que para x^2 ser diferente de zero, x tem de ser diferente de zero. No entanto, nenhum dos alunos que concluiu $x \neq 0$ incluiu esta condição no quadro de sinal. Os três alunos que incluíram a restrição nas suas construções fizeram-no tendo em conta exclusivamente a condição $x^2 \neq 0$, o que apesar de revelar que reconhecem que esta condição só é válida se $x \neq 0$, mostra também que não compreendem a necessidade de indicar exatamente os pontos em que a função não está definida.

Tal como pode ser observado pela Figura 13, o quadro de sinal da Laura não inclui o valor máximo nem o valor mínimo, apenas o maximizante e o minimizante. Uma vez que nessa mesma aula, a propósito de um exercício da aplicação, a Laura tinha ido ao quadro apresentar a sua resolução onde construiu um quadro semelhante e totalmente correto, penso que esta falha se deve a uma distração, até porque se trata de uma das alunas com menos dificuldades na disciplina.

Os restantes alunos construíram o quadro de sinal, incluindo os valores máximo e mínimo ou pelo menos a indicação $P(-8)$ e $P(8)$, respetivamente, como por exemplo a aluna Tânia (Figura 14).

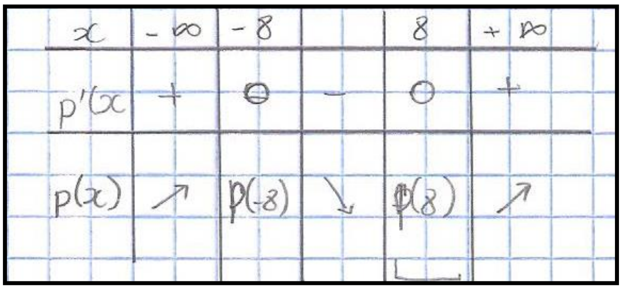


Figura 14- Quadro de sinal da derivada construído pela Tânia, na resolução do Problema 2.(b) da Ficha de Trabalho n.º 2.

Não posso deixar de referir que, ao contrário da Tânia, dos dez alunos que não incluíram diretamente no quadro o valor máximo e mínimo (-32 e 32), oito escreveram $f(-8)$ e $f(8)$ como extremos da função, tal como se pode observar na resolução da Joana (Figura 15).

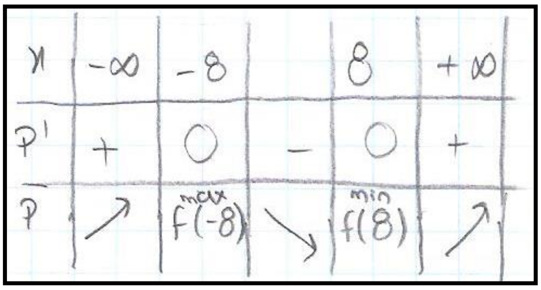


Figura 15- Quadro de sinal da derivada construído pela Joana, na resolução do Problema 2.(b) da Ficha de Trabalho n.º 2.

À semelhança da Joana, a aluna Mariana também indica no quadro qual dos extremos corresponde ao máximo e ao mínimo. No entanto, tal como é visível na Figura 16, considera como máximo $f(0)$. Uma vez que esta foi uma das alunas que considerou a condição $x^2 \neq 0$ na resolução da equação $P'(x) = 0$, penso que deva existir uma ligação entre esse facto e o quadro apresentado. Além disso, tal como já referi acima, a Mariana não considerou $x = -8$ como uma das soluções, pelo que não incluiu este valor no quadro de sinal, o que a pode ter levado a assumir que $f(0)$ seria o valor máximo.

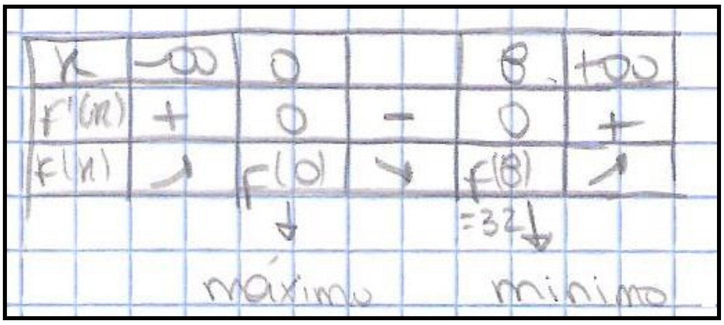


Figura 16- Quadro de sinal da derivada construído pela Mariana, na resolução do Problema 2.(b) da Ficha de Trabalho n.º 2.

Tal como sugere a Tabela 2, a maioria dos alunos utilizou a calculadora gráfica, para construir o quadro de sinal. Como referem nas suas resoluções, os alunos optaram por estudar o sinal da função derivada por observação do gráfico na calculadora, e apenas a Leonor preferiu fazê-lo analiticamente esboçando o gráfico da função. Uma vez que no cálculo dos zeros a aluna só considera o numerador, para estudar o sinal da derivada esboça apenas a parábola $2x^2 - 128$ (Figura 17), o que evidencia algumas lacunas nos conhecimentos sobre funções e a sua representação gráfica.

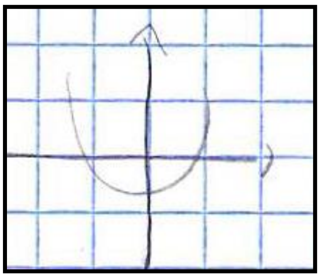


Figura 17- Esboço da função $2x^2 - 128$, realizado pela Leonor, na resolução do Problema 2.(b) da Ficha de Trabalho n.º 2.

Análise retrospetiva

Como é sugerido pela Tabela 3, após identificarem os extremos da função, 14 alunos deram uma resposta final ao problema. De notar que dos dez alunos que não responderam, três não resolveram o problema.

Apresentação da resposta final	Nº de alunos (n=24)	% de alunos
Apresenta uma resposta	14	58%
Não responde	10	42%

Tabela 3 – Apresentação da resposta final ao Problema 2.(b) da Ficha de Trabalho n.º 2

A maioria dos alunos respondeu de forma sucinta indicando apenas as dimensões da piscina, como por exemplo o aluno Tiago (Figura 18).

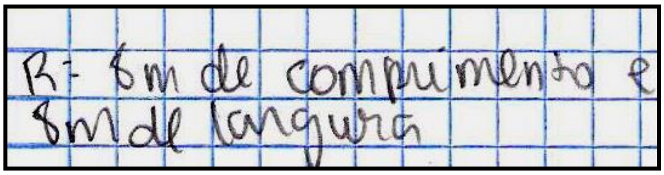


Figura 18 - Resposta do Tiago ao Problema 2.(b) da Ficha de Trabalho n.º 2.

Apesar de o enunciado pedir apenas as dimensões da piscina para o qual o perímetro é mínimo, 11 alunos, independentemente da forma como determinaram o mínimo, optaram por calcular o valor do perímetro. Não considero este processo estranho, uma vez que dos 11, oito incluíram o valor do perímetro máximo e mínimo no quadro de sinal. No entanto, tendo em conta o contexto do problema, o facto de os alunos calcularem $P(-8)$, sendo P o perímetro de um retângulo revela que enquanto estão a resolver os problemas não se preocupam com o contexto, efetuando os processos mecanizados, mesmo que eles não façam sentido em determinada situação (Figura 19).

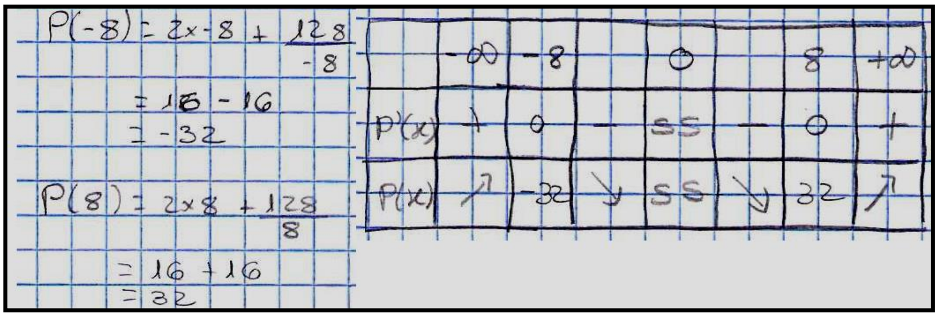


Figura 19 - Cálculo de $P(-8)$ e $P(8)$ e quadro de sinal da derivada, realizados pela Leonor, na resolução do Problema 2.(b) da Ficha de Trabalho n.º 2

Pelo lado positivo, devo referir que nenhum dos alunos que optou por não incluir os valores do máximo e do mínimo no quadro de sinal calculou $P(-8)$, o que revela que não sentiram necessidade de confirmar que 8 era o comprimento mínimo, demonstrando bons conhecimentos na interpretação dos resultados do quadro de sinal, ou seja, na relação entre o sinal da função derivada e sentido de variação e extremos da função original.

Dos 11 alunos que calcularam o perímetro mínimo, três fizeram-no exclusivamente para determinar o valor da largura da piscina (Figura 20). Todos os outros optaram por utilizar a informação de que a área da piscina é $64m^2$ e aplicaram a fórmula da área do retângulo (Figura 21).

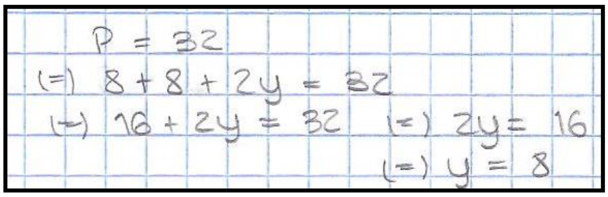


Figura 20 - Cálculo do valor da largura mínima da piscina, realizado pela Sara, na resolução do Problema 2.(b) da Ficha de Trabalho n.º 2

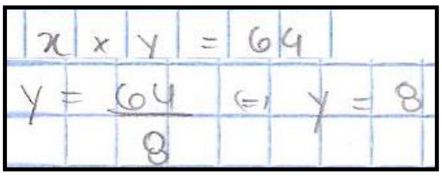


Figura 21- Cálculo do valor da largura mínima da piscina, realizado pela Isabel, na resolução do Problema 2.(b) da Ficha de Trabalho n.º 2

Síntese

De uma forma geral, ao finalizar esta análise a conclusão principal que posso retirar é que os alunos recorreram massivamente aos conhecimentos sobre a relação entre o sinal da função derivada, o sentido de variação e extremos da função original para resolver o problema de otimização. Uma vez que este tipo de estratégia nunca lhes tinha sido apresentado penso que, tal como sugere Threfall (2002), a estratégia emergiu quando os alunos contactaram com o problema. Tendo em conta as características do mesmo, os alunos terão percebido que para determinar as dimensões mínimas da piscina deveriam determinar o mínimo da função apresentada, fazendo assim uso dos novos recursos de que dispunham, neste caso da relação entre a função derivada e a função original. Ao reconhecerem que esta relação pode estar na base da estratégia para a resolução de um problema de otimização, os alunos demonstram ter realizado aprendizagens significativas, nomeadamente, no que se refere à utilidade prática da relação.

Relativamente à fase inicial de resolução, apesar de os alunos terem revelado muitas dificuldades em equacionar a expressão pretendida na primeira alínea da tarefa, o contacto com o contexto apresentado permitiu que ao iniciarem o problema já estivessem familiarizados com a situação, o que facilitou a compreensão.

No que se refere à aplicação dos conhecimentos sobre derivadas, os alunos mostraram não sentir quaisquer dificuldades na aplicação das regras de derivação, o que vai ao encontro do estudo realizado por Orton em 1983, onde este concluiu que os estudantes apresentam um domínio razoável dos algoritmos necessários para o cálculo de derivadas em casos simples. Ao calcularem os zeros da função derivada os alunos revelaram alguma falta de conhecimentos no âmbito das funções racionais, nomeadamente no que se refere ao domínio das mesmas. Após o cálculo dos zeros da função derivada, grande parte dos alunos prosseguiu as suas resoluções construindo um quadro de sinal da derivada, o que demonstra que reconhecem a necessidade de estudar o sinal da função derivada para posteriormente identificar o sentido de variação da função original e respetivos extremos. De modo a estudar o sinal da função derivada, apenas uma aluna não recorreu à calculadora gráfica, o que mostra que os alunos sentem à vontade para recorrer a esta ferramenta e a consideram útil neste contexto. Por outro lado, fica claro que evitam fazer o esboço de funções, o que vai ao encontro do que constatei ao longo de todo o ano letivo, isto é, de que os alunos têm sérias dificuldades em representar funções sem as visualizar na calculadora gráfica.

Muitos alunos revelaram também algumas dificuldades em indicar corretamente a função. Assim, apesar de o problema se referir à função $P(x)$ vários alunos utilizaram a letra f no lugar de P. Este facto remete para uma memorização que ocorre desde o Ensino Básico onde as funções se designam constantemente pela letra f (ou em alguns casos g e h). Apesar de não condicionar as resoluções, não posso deixar de referir que revela bastante falta de espírito crítico por parte dos alunos, uma vez que calcular, por exemplo, $f(8)$ não fazia qualquer sentido neste problema.

Relativamente à interpretação, verifiquei que muitos alunos não demonstram grande preocupação em atender ao contexto do enunciado, o que fica claro, por exemplo, na inclusão de valores negativos no quadro de sinal e no cálculo de $P(-8)$.

De referir que os três alunos que não resolveram o problema, raramente realizaram as tarefas propostas nas aulas, o que terá a ver com o facto de possivelmente assumirem que estavam reprovados na disciplina de Matemática A, uma vez que as suas classificações variavam entre três e cinco valores.

5.2. Problema 4 da Ficha de Trabalho n.º 2

Esta tarefa (Anexo 2.6.) teve como objetivo o contacto com um problema de otimização baseado numa função polinomial de terceiro grau, contextualizado e relacionado com a aplicabilidade prática da Matemática. Nesta análise pretendo perceber como os alunos abordam pela primeira vez um problema deste tipo com uma função polinomial. Tendo em conta o seu contexto particular, um dos pontos principais da análise será também a forma como os alunos respeitam, ou não, as condições implícitas do enunciado.

4. Médicos investigadores estudaram, durante 30 dias, a evolução de uma doença contagiosa, numa dada cidade. A percentagem da população infetada é dada por:

$p(t) = 0{,}3t^2 - 0{,}01t^3$, onde t representa o número de dias.

Em que dia do período estudado é máxima a percentagem de população infetada?

Figura 22 – Problema 4 da Ficha de Trabalho n.º 2

Compreensão do Problema

De uma forma geral os alunos não tiveram dificuldades em compreender o enunciado do problema e de imediato iniciaram a sua resolução. Alguns optaram por esquematizar a informação do enunciado, tal como pode ser observado nas resoluções da aluna Laura (Figura 23). Esta esquematização revela que a aluna fez uma interpretação correta das variáveis que integram a expressão analítica da função em causa e, mais do que isso, que sente a necessidade de realçar os dados que tem no enunciado para posteriormente avançar na resolução do problema.

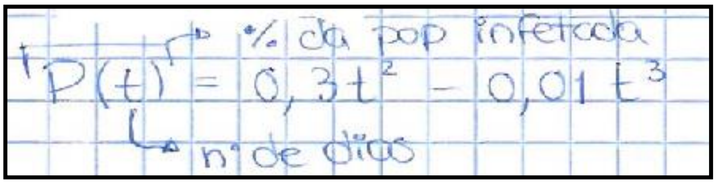


Figura 23- Indicação das variáveis do Problema 4 da Ficha de Trabalho n.º 2, feita pela Laura

Durante a aula não houve nenhuma questão sobre o enunciado, o que me leva a crer que os alunos perceberam-no sem qualquer dificuldade, uma vez que na generalidade eles são pouco autónomos e questionam sempre que têm dúvidas.

Execução do plano

Os alunos recorreram maioritariamente à noção de derivada para resolver o problema apresentado (79%), estabelecendo a relação entre o sinal da função derivada e o sentido de variação e extremos da função original (Tabela 4). As restantes alunas recorreram diretamente à calculadora gráfica, sem estabelecerem relação com a função derivada.

Estratégia adotada	N.º de alunos (n=24)	% de alunos
Recorre à noção de derivada e utiliza a calculadora gráfica	18	75%
Recorre à noção de derivada e não utiliza a calculadora gráfica	1	4%
Não recorre à noção de derivada	2	8%
Não resolve	3	13%

Tabela 4 - Tipo de estratégia utilizado pelos alunos na resolução do Problema 4 da Ficha de Trabalho n.º 2

Todos os alunos que recorreram à noção de derivada começaram por derivar a função polinomial através das regras de derivação, não se registando nenhum erro na aplicação das mesmas. Em seguida calcularam os zeros da função derivada de modo a identificar os extremos da função original. Esta fase tornou-se um pouco demorada, uma vez que os alunos evidenciaram bastantes dificuldades na aplicação da fórmula resolvente, dado que os coeficientes não eram inteiros, no entanto, acabaram por realizar os cálculos de forma correta. Apenas duas alunas se enganaram no cálculo dos zeros mas tinham optado por utilizar a lei do anulamento do produto.

Posteriormente e utilizando o processo abordado nas aulas, 15 destes alunos optaram por construir um quadro de sinal da derivada para analisar o sentido de variação da função original. Os restantes quatro assumiram de imediato que os zeros da derivada correspondem aos extremos da função original e consequentemente indicaram logo a resposta final, o que pode levantar algumas dúvidas sobre a solidez dos seus conhecimentos, neste tópico.

Tal como pode ser observado na Tabela 4, a maioria dos alunos que recorreu à noção de derivada utilizou a calculadora gráfica. O recurso a esta ferramenta prendeu-se com a construção do quadro de sinal, uma vez que os alunos observaram o sinal da função derivada através da representação gráfica produzida pela calculadora, como fica claro na resolução da aluna Vitória (Figura 24).

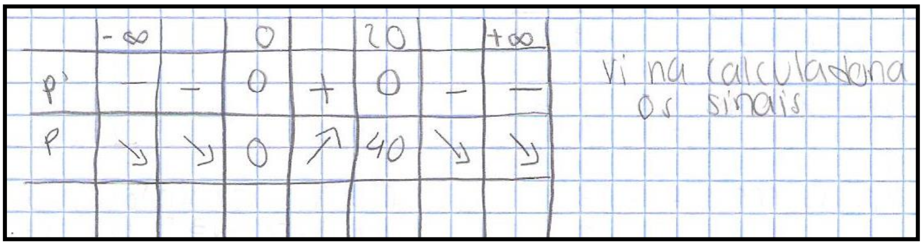


Figura 24- Quadro de sinal da derivada construído pela Vitória na resolução do Problema 4 da Ficha de Trabalho n.º 2

Apenas uma aluna, a Leonor, tal como no problema anterior, não recorreu a esta ferramenta, optando por esboçar o gráfico da função derivada, aparentemente através dos seus conhecimentos sobre a representação de parábolas (Figura 25).

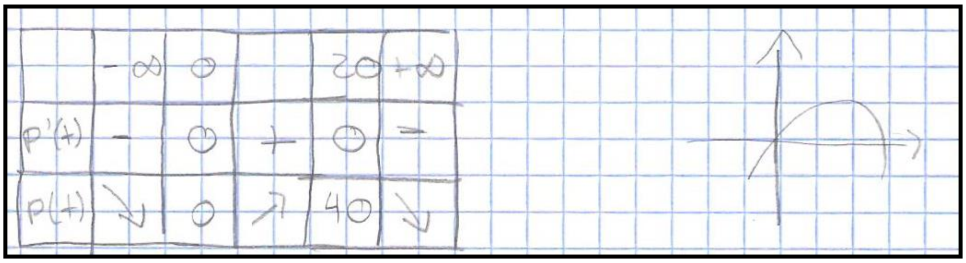


Figura 25- Quadro de sinal da derivada e esboço da função feitos pela Leonor na resolução do Problema 4 da Ficha de Trabalho n.º 2

Relativamente às duas alunas que optaram por abordar este problema recorrendo unicamente à calculadora gráfica, sem estabelecer relação com a noção de derivada (Tabela 4), é possível perceber que apesar de ambas usarem esta ferramenta, não o fizeram da mesma forma. Assim, a aluna Nádia utilizou a calculadora gráfica como *ferramenta computacional* (Doer & Zangor, 2000) determinando as imagens de todos os objetos inteiros entre 0 e 30, isto é, calculando a percentagem de população infetada em cada um dos dias do período estudado. No entanto, além de demorada esta estratégia pode induzir em erros, uma vez que o maximizante podia não ser um valor inteiro. A aluna Andreia, por sua vez, recorreu à calculadora gráfica como uma *ferramenta de visualização* (Doer & Zangor, 2000) determinando o máximo da função através das funcionalidades da mesma (Figura 26).

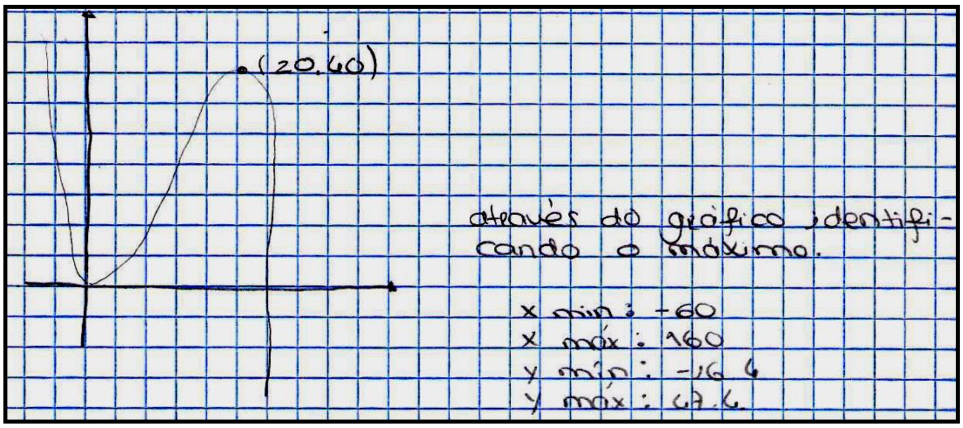


Figura 26- Resolução da Andreia do Problema 4 da Ficha de Trabalho n.º 2

Análise Retrospetiva

No final do problema, 15 alunos responderam à questão colocada no enunciado, tal como pode ser observado na Tabela 5. De notar que dos nove que não responderam, três não resolveram o problema.

Apresentação da resposta final	N.º de alunos (n=24)	% de alunos
Apresenta uma resposta	15	63%
Não responde	9	37%

Tabela 5- Apresentação da resposta final ao Problema 4 da Ficha de Trabalho n.º 2

Uma vez que o problema pedia apenas o dia em que a percentagem de população infetada foi máxima, após identificarem o maximizante, os alunos poderiam ter dado a resposta de imediato. No entanto, 12 alunos foram ainda calcular $p(20)$ de modo a encontrar a percentagem de população infetada nesse mesmo dia do período em estudo.

Penso que este cálculo "extra" se deve ao facto de, durante as aulas, ter indicado aos alunos para incluírem no quadro de sinal o valor dos extremos ou pelo menos a forma como estes se calculam, ou seja neste caso, $p(0)$ e $p(20)$. Assim, todos os alunos que construíram o quadro preencheram-no completa e corretamente. Três alunas, por exemplo a Vitória (Figura 24), indicaram efetivamente o valor dos extremos no quadro enquanto todos os outros colocaram apenas $p(0)$ e $p(20)$, como por exemplo a Marta, Figura 27. Deste modo, o facto de posteriormente, para dar a resposta final, os alunos sentirem necessidade de calcular o máximo remete-me para uma mecanização do processo e para uma ligeira falta de atenção ao que é proposto no enunciado, o que se relaciona obviamente com a primeira fase, a compreensão do problema.

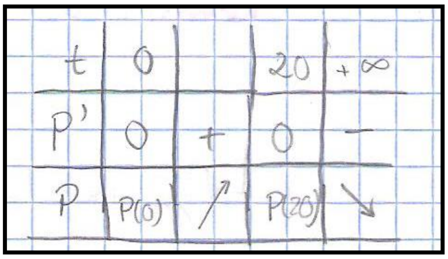


Figura 27 - Quadro de sinal da derivada construído pela Marta na resolução do Problema 4 da Ficha de Trabalho n.º 2

Como pode ser observado pela resolução da aluna Marta, esta construiu o quadro de sinal apenas para valores não negativos, o que revela uma boa compreensão do problema e atenção ao contexto. Além da Marta, outros oito alunos tiveram este cuidado, o que me permite constatar que compreenderam o problema e que perceberam que devem construir o quadro apenas com os valores possíveis para o contexto indicado.

Relacionado com a plausividade dos resultados é de registar o caso das alunas Joana e Sara que construíram um quadro de sinal em que um dos zeros da função derivada tinha sido erradamente calculado e que voltaram a calcular os zeros da função derivada, possivelmente porque se aperceberam que o valor obtido para maximizante não fazia sentido tendo em conta o contexto do problema (Figura 28).

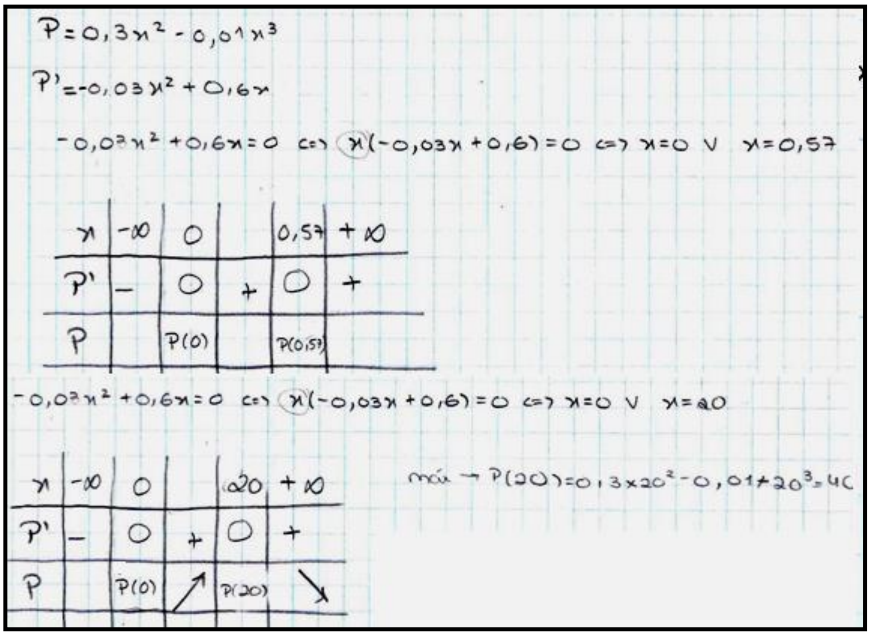


Figura 28- Resolução da Joana do Problema 4 da Ficha de Trabalho n.º 2

Tal como referi anteriormente, dos 19 alunos que recorreram aos conhecimentos sobre derivadas para resolver este problema, apenas 15 construíram um quadro de sinal. Os restantes quatro identificaram de imediato 20 como o dia em que a percentagem de população infetada foi máxima, sem proceder a nenhuma representação ou cálculo adicional. Tendo em conta o que observei na aula, isso deveu-se principalmente ao facto de a expressão algébrica da função não ter termo independente, pelo que os alunos identificaram imediatamente que $p(0)$ seria 0 não podendo, portanto, ser o máximo. Aliás uma das alunas, a Isabel (Figura 29), iniciou a construção do quadro de sinal mas acabou por não o concluir, afirmando que obviamente 20 seria o maximizante.

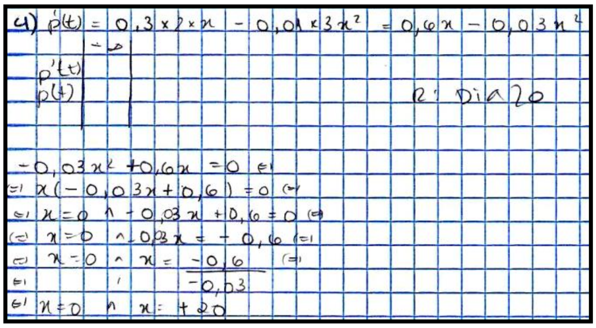
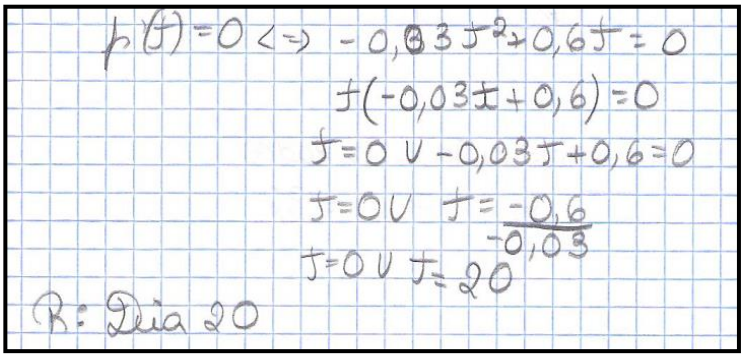


Figura 29- Resolução da Isabel do Problema 4 da Ficha de Trabalho n.º 2

Uma vez que estes alunos responderam corretamente no final do problema, penso que o facto de não sentirem necessidade de calcular $p(20)$ está também relacionado com a interpretação correta que fizeram do enunciado. No entanto, esta opção dos alunos pode também evidenciar conhecimentos pouco sólidos no âmbito da relação entre o sinal da função derivada e o sentido de variação e extremos da função original, uma vez que de imediato identificaram os zeros da derivada como extremos da função original, desconsiderando o estudo do sentido de variação da mesma. A maioria dos alunos respondeu que a percentagem máxima de população infetada registou-se no dia 20, tal como se pode observar na resolução do Afonso (Figura 30), sendo que alguns destes ainda acrescentaram a respetiva percentagem.



$p(t)=0 \Leftrightarrow -0{,}03t^2+0{,}6t=0$

$t(-0{,}03t+0{,}6)=0$

$t=0 \vee -0{,}03t+0{,}6=0$

$t=0 \vee t=\frac{-0{,}6}{-0{,}03}$

$t=0 \vee t=20$

R: Dia 20

Figura 30 - Parte da resolução e resposta do Afonso ao Problema 4 da Ficha de Trabalho n.º 2

No entanto, nenhum aluno respondeu que a percentagem máxima de doentes ocorreu 20 dias após o início do estudo ou no vigésimo dia do período estudado. Isto revela que os alunos podem ter assumido que o período estudado se iniciou no dia um e terminou no dia 30 de um determinado mês. Este facto revela alguma desatenção por parte dos alunos mas também algumas lacunas no que se refere à interpretação. Aliás, durante a discussão de resultados, chamei a atenção para a necessidade de responder adequadamente à questão, ou seja, registar que a percentagem máxima de população infetada ocorreu no dia 20 do período estudado e mais do que um aluno me questionou sobre a diferença entre afirmar isso ou simplesmente no dia 20 (de um determinado mês).

Síntese

De uma forma geral, os objetivos deste problema foram cumpridos pela generalidade da turma e não se verificaram grandes dificuldades. Os alunos revelaram uma boa compreensão do contexto do problema, o que se verifica principalmente pela exclusão dos valores negativos no caso dos alunos que construíram quadros de sinal da derivada. No que se refere às estratégias utilizadas, fica mais uma vez claro que os alunos optam, na sua maioria, por recorrer aos conhecimentos sobre a relação entre o sinal da função derivada e o sentido de variação e extremos da função original. Os alunos que se socorreram das aprendizagens sobre derivadas fizeram-no sem evidenciar qualquer problema, recorrendo, sem exceção, às regras de derivação. Uma vez que os coeficientes da função não eram números inteiros alguns alunos sentiram dificuldades em calcular os zeros da função derivada, especialmente pela fórmula resolvente. De modo a estudar o sinal da função derivada, os alunos recorreram à calculadora gráfica, sendo que apenas uma aluna optou por esboçar o gráfico da função sem recorrer a esta ferramenta. Embora a maioria dos estudantes tenha identificado corretamente o maximizante e minimizante da função, através do estudo do sinal da derivada, quatro alunos assumiram de imediato os zeros da derivada como extremos da função original. Assim, posso conjeturar que não realizaram aprendizagens significativas no âmbito da relação entre a derivada e a função original, uma vez que não tiveram em conta os casos em que apesar de a derivada ter zeros não muda de sinal e consequentemente a função original não tem extremos.

As alunas que não recorreram à noção de derivada para resolverem o problema são justamente as duas alunas com mais dificuldades na Matemática. Desta forma posso conjeturar que não reconhecem a relação entre o sinal da função derivada e o sentido de variação e extremos da função original como um recurso viável para a resolução deste problema. Não posso garantir o motivo pelo qual têm esta perspetiva, se por não terem conhecimentos no âmbito das derivadas ou por não acederem aos mesmos em contexto de resolução de problemas, tal como sugerem os resultados de várias investigações citadas por Carlson e Bloom (2005). Apesar disso, o facto de as alunas terem desenvolvido uma estratégia de resolução é extremamente positivo, dado que estas não costumam realizar praticamente nenhuma atividade em sala de aula. Acredito que as características do próprio problema, nomeadamente a sua estrutura e linguagem simples, fizeram com as que alunas sentissem que era possível resolvê-lo e para tal produziram uma estratégia de acordo com os seus conhecimentos e preferências. Embora este seja um dado positivo, é de realçar que a estratégia utilizada pela Nádia (calcular a percentagem de população infetada para cada um dos 30 dias) é pouco eficiente, revela-se muito demorada e pode conduzir a erros.

Relativamente aos três alunos que não realizaram o problema, um deles não tentou realizar nenhuma das tarefas da ficha de trabalho, tal como sucedeu na maioria das aulas anteriores. Os outros dois alunos não resolveram o problema porque não tiveram tempo, uma vez que sentiram muitas dificuldades na tarefa anterior, demorando bastante mais tempo que os colegas.

Finalmente, tal como no problema anterior, ficam evidentes algumas dificuldades em responder exatamente ao que é pedido no enunciado. Estas dificuldades decorrem, por vezes, da falta de atenção e no caso particular deste problema, do facto de os alunos assumirem que a epidemia se iniciou no primeiro dia de um certo mês concreto. Além disso, fica novamente bastante claro que os alunos não sentem necessidade de dar uma resposta completa ao problema limitando-se, na maioria das vezes, a responder de forma muito sucinta. Acredito que tal se deve muitas vezes ao facto de os alunos encararem as situações apresentadas, mesmo as contextualizadas, como um meio para o professor avaliar a forma como estes aplicam os seus conhecimentos, esquecendo a aplicabilidade da disciplina. Esta desvalorização da importância das respostas no contexto da resolução de problemas remete-me para a ideia de que muitas vezes os alunos pensam que a disciplina de Matemática não faz qualquer sentido (Ponte, 2010), o que os leva a desconsiderar a relação entre a Matemática e a realidade (Ponte & Quaresma, 2012).

5.3. Problema 1.(c) da Tarefa "A População da Urbanização"

A tarefa na qual o problema de otimização está inserido (Anexo 2.7.) foi construída de modo a que os alunos pudessem contactar com a aplicabilidade da Matemática, principalmente numa área que lhes é próxima, tendo em conta a sua área de estudos, como é a demografia.

Do ponto de vista da análise, como este é um problema de otimização com uma estrutura bastante aberta, permite perceber de que forma os alunos abordam este tipo de situação e, particularmente, se neste caso recorrem aos conhecimentos sobre derivadas reconhecendo que as aprendizagens realizadas ao longo da unidade de ensino os podem ajudar.

1. Após a sua construção, uma nova urbanização em Lisboa tinha uma população de, aproximadamente, 500 pessoas. Tendo em conta a localização e a qualidade das infra-estruturas da urbanização foi estimado um crescimento anual de 100 habitantes.

(a) Encontra uma expressão para a população P da urbanização, t anos após a sua inauguração.

(b) Devido à crise económica, o aglomerado populacional não cresceu como estava previsto e a evolução da população tem um modelo mais ajustado na expressão:
$P(t) = 100(5 + t - 0.25t^2)$, onde t representa os anos passados após a inauguração da urbanização.
Qual foi a taxa de variação da população no 1º ano? E no 2º? E no 3º?
Interpreta os resultados no contexto do problema.

(c) Adotando o modelo referido na alínea anterior, descreve como evoluiu a população da urbanização ao longo dos seis primeiros anos.

Figura 31 - Tarefa "A População da Urbanização"

Compreensão do Problema

Uma vez que o problema é a última questão da tarefa, ao longo das alíneas anteriores os alunos puderam familiarizar-se com o contexto. A situação apresentada nesta tarefa foi facilmente compreendida pelos alunos que resolveram corretamente as questões iniciais, apesar de na segunda terem sido verificadas algumas dificuldades de interpretação do significado de taxa de variação que serão detalhadas mais à frente. No que se refere especificamente ao problema, os alunos manifestaram algumas dificuldades em compreender o seu objetivo. Ao construir este problema já esperava que os alunos colocassem algumas questões, nomeadamente, sobre a estratégia a utilizar ou sobre o tipo de informações que teriam de incluir nas suas respostas de modo a ir ao encontro dos objetivos do problema. No entanto, as condicionantes revelaram-se bastante maiores, com grande parte dos alunos a não compreender o próprio enunciado, não sabendo o que se pretendia com "evolução da população".

Execução do plano

Apesar das dificuldades em compreender o enunciado, após algumas discussões entre si e com algum apoio da minha parte, os alunos acabaram por elaborar os seus planos, ainda que implicitamente, e iniciar as suas resoluções. Como pode ser observado na Tabela 6, mais de metade dos alunos (58%) optou por resolver este problema recorrendo aos seus conhecimentos sobre derivadas.

Estratégia Adotada	N.º de alunos (n=24)	% de alunos
Recorre à noção de derivada e utiliza a calculadora gráfica	14	58%
Não recorre à noção de derivada	6	25%
Não resolve	4	17%

Tabela 6- Tipo de estratégia utilizado pelos alunos na resolução do Problema 1.(c) da Tarefa "A População da Urbanização"

Dentro do grupo de alunos que decidiu aplicar as aprendizagens realizadas ao longo da unidade de ensino, nem todos seguiram o mesmo caminho, existindo três diferentes sub-estratégias a referir. Assim, desses 14 alunos, sete limitaram a sua resolução ao cálculo da taxa de variação para os 4.º, 5.º e 6.º anos do período em estudo (Figura 32). De notar que esta estratégia de resolução parece ter sido influenciada pela alínea (b), onde os alunos calcularam a taxa de variação para $t = 1$, $t = 2$ e $t = 3$.

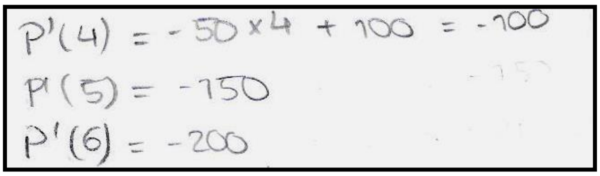


Figura 32- Resolução da Marta do Problema 1.(c) da Tarefa "A População da Urbanização"

Apesar de esta resolução permitir perceber a forma como a população evoluiu em cada um dos referidos anos, não fornece informações sobre a evolução global da mesma. Além disso, as conclusões retiradas por alguns alunos através destes cálculos revelam que realizaram aprendizagens pouco sólidas no que se refere ao significado de taxa de variação. Deste modo foi comum encontrar respostas como a do Nuno (Figura 33) onde considera que a população foi diminuindo em 50 pessoas por ano. Este facto evidencia que os alunos não compreendem que a taxa de variação neste caso representa o número de pessoas que a urbanização tinha a mais (ou a menos) no final de determinado ano.

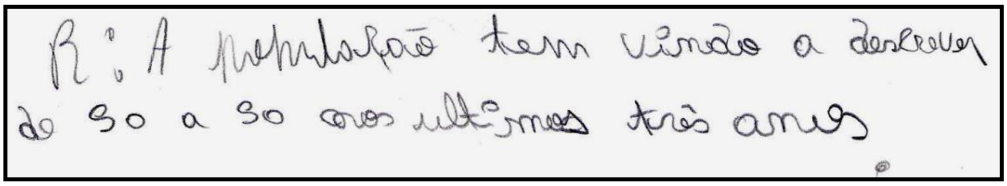


Figura 33 - Resposta do Nuno ao Problema 1.(c) da Tarefa "A População da Urbanização"

De notar que esta compreensão frágil do significado de taxa de variação, juntamente com as conclusões retiradas da alínea (b) leva cinco alunos a dar respostas semelhantes à da Joana (Figura 34).

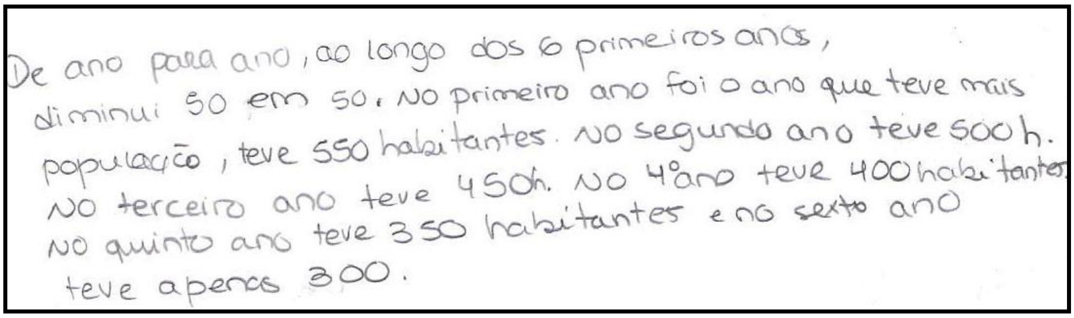


Figura 34 - Resposta da Joana ao Problema 1.(c) da Tarefa "A População da Urbanização"

Tal como se pode observar pela sua resolução a aluna considerou que, uma vez que $P'(1) = 50$, no primeiro ano viviam 550 pessoas na urbanização. Como a taxa de variação para cada um dos anos vai diminuindo sempre 50, a Joana, e os restantes colegas que optaram por esta resolução, concluíram que a população foi diminuindo em 50 habitantes por ano.

Além destes sete alunos, ainda quatro alunas optaram por calcular a taxa de variação para $t = 4$,$t = 5$, $t = 6$. No entanto, após realizarem os cálculos, possivelmente consideraram que as informações obtidas não eram suficientes e acabaram por recorrer à relação entre o sinal da função derivada e o sentido de variação e extremos da função original. Assim, e uma vez que já tinham determinado a função derivada na alínea (b), resolveram a equação $P'(t) = 0$ e em seguida construíram o quadro de sinal da derivada (Figura 35).

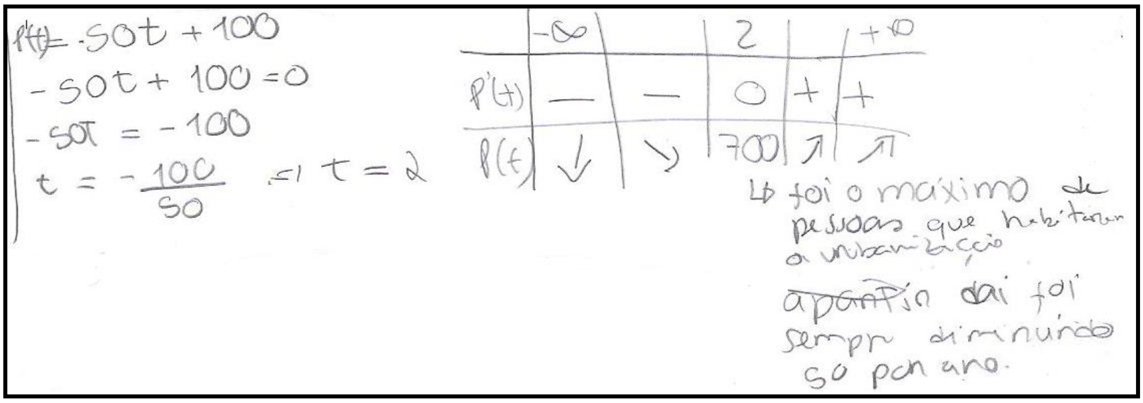
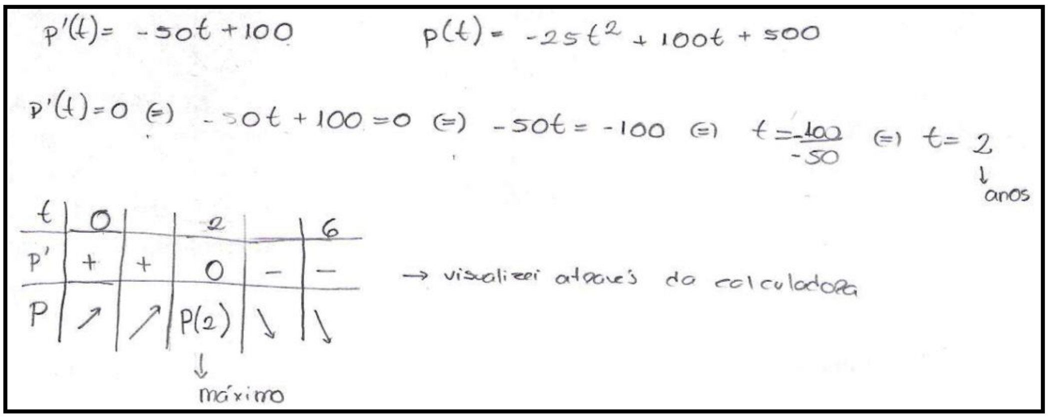


Figura 35- Resolução da Vitória do Problema 1.(c) da Tarefa "A População da Urbanização"

Tal como pode ser observado, o quadro de sinal elaborado por esta aluna revela bastantes lacunas. Inicialmente, a Vitória identificou o sinal da derivada de forma incorreta, o que levou obviamente a uma constatação errada do sentido de variação da função original. Em seguida, identifica 700 como máximo (para $t = 2$), o que é incoerente com o quadro que construiu. Este facto poderia levar-me a concluir que a Vitória reconhece o ponto em que a função passa de decrescente a crescente como ponto de máximo e portanto que não compreende a relação entre o sentido de variação de uma função e os seus extremos. No entanto, ao longo dos outros problemas e de todas as aulas, a Vitória não apresentou quaisquer dificuldades neste âmbito, sendo uma das alunas mais participativas. Uma vez que a aula estava a terminar, penso que esta resolução errónea se deveu à pressa em finalizar o problema e também a alguma desatenção. Além disso, o próprio valor do máximo é calculado de forma errada uma vez que $P(2) = 600$, o que, dado que a Vitória nunca apresentou dificuldades deste tipo, fortalece ainda mais a minha ideia de que estes erros se deveram a uma falta de atenção. De notar ainda que, embora tenha tido a preocupação de analisar o sentido de variação da função, a aluna continua influenciada pelo cálculo da taxa variação afirmando na sua resposta que a população irá diminuir em 50 pessoas por ano, o que mais uma vez demonstra uma fraca compreensão do significado de taxa de variação aplicado neste contexto.

Quem também aplicou os seus conhecimentos sobre a relação entre o sinal da função derivada e o sentido de variação e extremos da função original foi a aluna Tânia (Figura 36).


$p'(t) = -50t + 100$ $p(t) = -25t^2 + 100t + 500$

$p'(t) = 0 \Leftrightarrow -50t + 100 = 0 \Leftrightarrow -50t = -100 \Leftrightarrow t = \frac{-100}{-50} \Leftrightarrow t = 2$ anos

t	0		2		6
p'	+	+	0	−	−
P	↗	↗	$P(2)$	↘	↘

→ visualizei através da calculadora

máximo

Figura 36- Resolução da Tânia do Problema 1.(c) da Tarefa "A População da Urbanização"

A Tânia construiu o quadro corretamente e, como é visível, recorreu à calculadora gráfica para estudar o sinal da função derivada identificando depois de forma acertada o sentido de variação da função original e o seu extremo no intervalo em questão.

Recorrendo ainda a aprendizagens realizadas ao longo desta unidade de ensino, dois alunos optaram por estudar a evolução da população graficamente. Assim, após calcularem a taxa de variação para os seis anos em questão, construíram uma representação gráfica da função que a cada ano faz corresponder a taxa de variação (Figura 37).

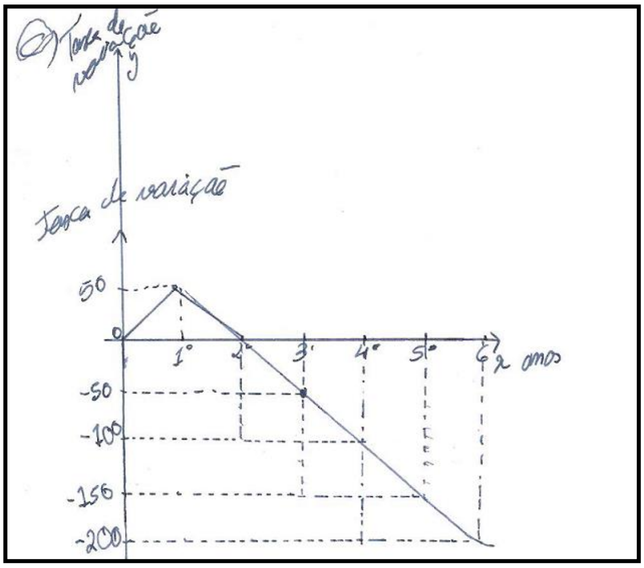


Figura 37 - Resolução do Afonso do Problema 1.(c) da Tarefa "A População da Urbanização"

Apesar de esta representação não estar totalmente correta (a taxa de variação para $t = 0$ é 100 e não 0) revela que os alunos têm a noção de que a taxa de variação pode ser representada graficamente. No entanto, não é possível assegurar que os alunos compreendem que a representação que construíram corresponde (a menos do erro no ponto $(0{,}0)$) à representação gráfica da função derivada. Ao apresentarem esta resolução os alunos demonstraram bastante originalidade e confiança nas suas capacidades uma vez que este tipo de abordagem nunca foi realizado nas aulas. Embora os alunos não tenham retirado quaisquer conclusões a partir desta representação, dando por terminada a sua resolução, esta seria bastante válida, dado que através da representação gráfica da função derivada poderiam ter identificado o sentido de variação da função original, ou seja, a evolução da população.

Como pode ser observado na Tabela 6, seis alunos optaram por resolver este problema sem recorrer à noção de derivada, determinando diretamente na função original o número de habitantes da urbanização. De realçar, no entanto, que três destes alunos apenas realizaram os cálculos para $t = 4$, $t = 5$ e $t = 6$ (Figura 38), o que, tal como já referi, se relaciona possivelmente com a alínea (b).

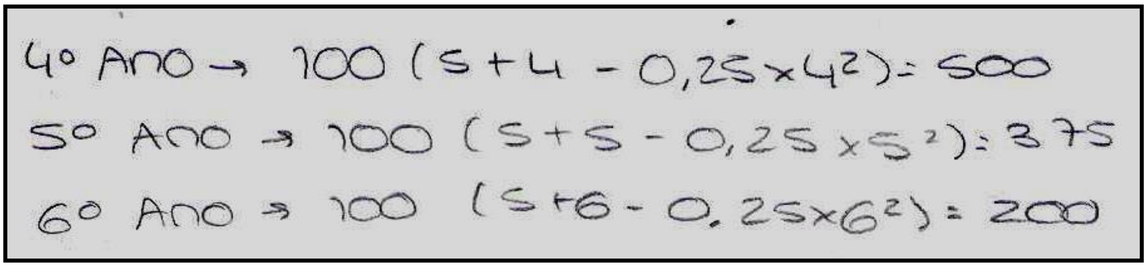


Figura 38 - Resolução da Carolina do Problema 1.(c) da Tarefa "A População da Urbanização"

Ao contrário da Carolina, outros três alunos optaram por calcular o número de habitantes para cada um dos anos (Figura 39), o que revela que possivelmente compreenderam que os cálculos efetuados na alínea (b) para a taxa de variação não fornecem o tipo de informação necessário para responder à questão.

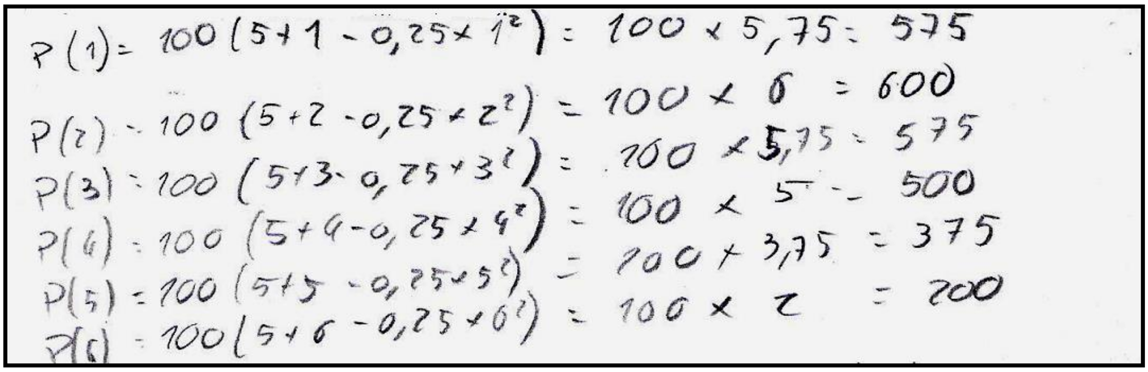


Figura 39 - Resolução da Nádia do Problema 1.(c) da Tarefa "A População da Urbanização"

Análise retrospetiva

Ao terminarem a resolução do problema, 17 alunos deram resposta à situação apresentada (Tabela 7). De notar que dos sete que não responderam, quatro não apresentaram qualquer resolução, pelo que efetivamente apenas três não sentiram necessidade de responder ao problema.

Apresentação da resposta final	N.º de alunos (n=24)	% de alunos
Apresenta uma resposta completa	11	46%
Apresenta uma resposta incompleta	6	25%
Não responde	7	29%

Tabela 7- Apresentação da resposta final ao Problema 1.(c) da Tarefa "A População da Urbanização"

De uma forma geral, os alunos demonstraram bastantes dificuldades em responder à situação apresentada no enunciado, uma vez que não foi apresentada uma pergunta concreta. Assim, a maioria apresentou respostas bastante vagas mas com algumas diferenças entre si dependendo da estratégia utilizada. Optei por organizar as respostas dadas em duas categorias: completa e incompleta, dependendo da forma como os alunos utilizaram, ou não, todas as informações decorrentes das suas resoluções para responder à situação apresentada.

Tal como já referi, muitos alunos optaram por calcular a taxa de variação para os últimos três anos do período apresentado, utilizando também as conclusões da alínea (b) para dar uma resposta. A resposta dada pela Isabel (Figura 40) é um dos exemplos de resposta incompleta apresentada após ter procedido ao cálculo da taxa de variação.

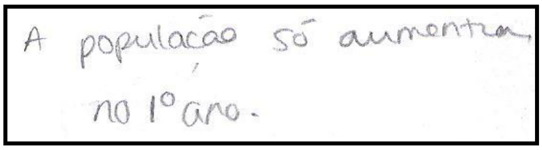

A populacão só aumentou
no 1º ano.

Figura 40- Resposta da Isabel ao Problema 1.(c) da Tarefa "A População da Urbanização"

Ao contrário desta aluna, a maioria dos colegas que optou por essa estratégia procurou elaborar as suas respostas de modo a evidenciar de forma mais detalhada a evolução da população da urbanização (Figura 41). Apesar de estas respostas, ou pelo menos os valores apresentados, não estarem corretos (devido à interpretação errada do significado de taxa de variação) evidenciam algum cuidado em responder de acordo com o pretendido e de uma forma tão completa quanto possível.

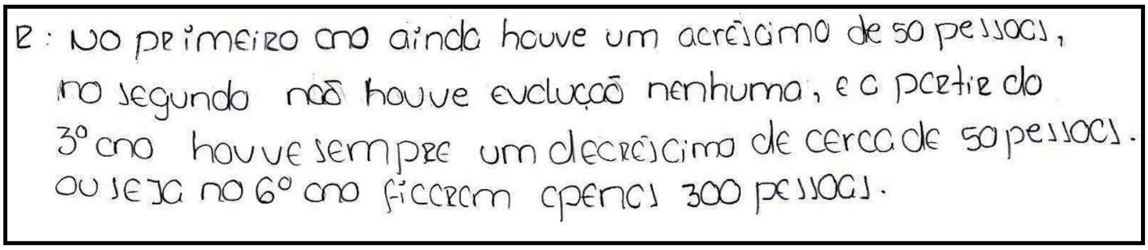

R: No primeiro ano ainda houve um acréscimo de 50 pessoas,
no segundo não houve evolução nenhuma, e a partir do
3º ano houve sempre um decréscimo de cerca de 50 pessoas.
ou seja no 6º ano ficaram apenas 300 pessoas.

Figura 41- Resposta da Melissa ao Problema 1.(c) da Tarefa "A População da Urbanização"

A Melissa recorreu aos cálculos que realizou e procurou, de forma sucinta, descrever a evolução da população. Assim, tendo em conta a sua resolução e a interpretação que fez da mesma, concluiu que a partir do terceiro ano se verificou um decréscimo anual de 50 habitantes o que culminou em 300 habitantes no final do período estudado. De notar, no entanto, que a aluna nunca refere a população inicial, considerando possivelmente os dados do enunciado e as conclusões da alínea (b).

Relativamente aos alunos que optaram por calcular diretamente a população em cada um dos anos, verificou-se que metade (três) deram respostas muito incompletas, como por exemplo a Mónica (Figura 42) que apenas refere uma diminuição da população ao longo dos anos, sem a quantificar.

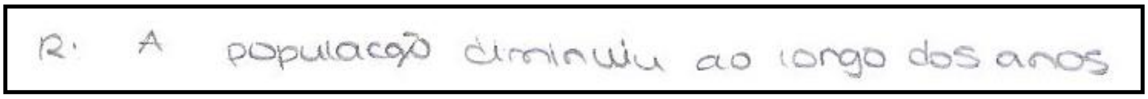

R: A população diminuiu ao longo dos anos

Figura 42 - Resposta da Mónica ao Problema 1.(c) da Tarefa "A População da Urbanização"

Os outros três alunos procuraram dar respostas mais completas como no caso da Andreia (Figura 43) mas apenas o Ricardo (Figura 44) identificou na sua resposta a população máxima que residiu na urbanização.

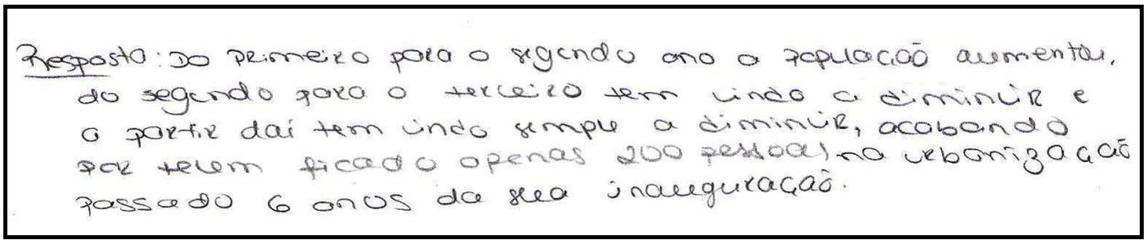

Resposta: Do primeiro para o segundo ano a população aumentou, do segundo para o terceiro tem vindo a diminuir e a partir daí tem vindo sempre a diminuir, acabando por terem ficado apenas 200 pessoas na urbanização passado 6 anos da sua inauguração.

Figura 43 - Resposta da Andreia ao Problema 1.(c) da Tarefa "A População da Urbanização"

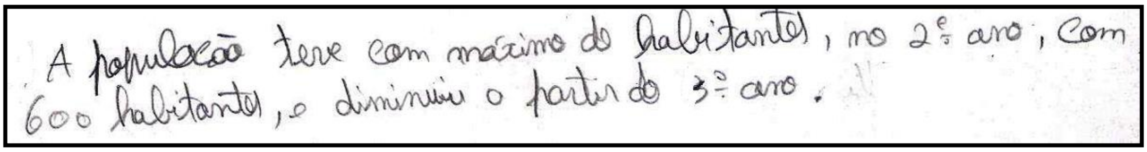

A população teve com máximo do habitantes, no 2.º ano, com 600 habitantes, e diminuiu a partir do 3.º ano.

Figura 44 - Resposta do Ricardo ao Problema 1.(c) da Tarefa "A População da Urbanização"

Apesar de ter calculado a população da urbanização em cada um dos anos, a Andreia apenas refere o número de habitantes registados no último ano. A aluna identifica corretamente um decréscimo na população a partir do 2.º ano, no entanto, não dá quaisquer detalhes e, tendo em conta os seus cálculos, poderia ter constatado, por exemplo, entre que anos se verificou uma maior queda na ocupação da urbanização ou tal como o Ricardo, a população máxima e o ano em que tal ocorreu. Embora o Ricardo dê essa informação também ele estava em condições de uma resposta mais detalhada, nomeadamente, no que se refere ao número de habitantes da urbanização no final do período em estudo, à perda de habitantes verificada entre os quinto e sexto anos, entre outras informações.

De referir ainda a resposta da Tânia (Figura 45), que optou por recorrer à relação entre o sinal da função derivada e o sentido de variação e extremos da função original.

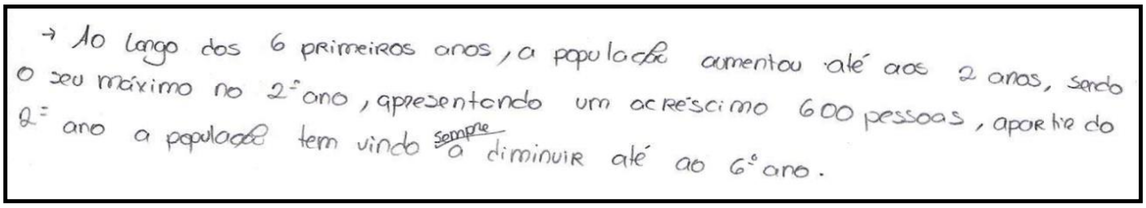

→ Ao longo dos 6 primeiros anos, a populaçõe aumentou até aos 2 anos, sendo o seu máximo no 2.º ano, apresentando um acréscimo 600 pessoas, a partir do 2.º ano a populaçõe tem vindo sempre a diminuir até ao 6.º ano.

Figura 45 - Resposta da Tânia ao Problema 1.(c) da Tarefa "A População da Urbanização"

Como se pode observar, a Tânia fez uma interpretação acertada do quadro de sinal que construiu (Figura 36) apesar de a resposta não estar totalmente correta, uma vez que a aluna refere que houve um acréscimo de 600 pessoas. Tendo em conta o comportamento da Tânia na resolução do problema e a facilidade com que compreendeu o enunciado, penso que este pequeno erro se deveu a uma distração. O facto de Tânia ter incluído apenas valores entre 0 e 6 no quadro de sinal (Figura 36) revela também uma interpretação correta do enunciado e a noção de que, mesmo nos procedimentos matemáticos, é importante ter atenção ao contexto apresentado. Ao contrário da Tânia, as outras quatro alunas que construíram um quadro de sinal não tiveram qualquer atenção ao contexto, como pode ser percebido pela resolução da Vitória (Figura 35).

Síntese

O principal objetivo deste problema era analisar a forma como os alunos reagiam a uma questão de natureza mais aberta onde não estava explícita uma pergunta. Ficou bastante claro que os alunos evidenciaram algumas dificuldades, principalmente no que respeita ao tipo de estudo que deveriam realizar para estudar a evolução da população.

Ao serem confrontados com o enunciado os alunos não elaboraram de imediato uma estratégia, apesar de, tal como nos problemas anteriores, poderem recorrer à relação entre o sinal da função derivada e o sentido de variação e extremos da função original. A maioria dos alunos acabou por não utilizar esta relação, o que penso ir ao encontro do que é referido na literatura. Assim, embora os alunos estivessem na posse dos recursos necessários para resolver o problema não souberam como utilizá-los, aliás, acredito que a maioria dos alunos, devido aos atributos do problema, não considerou sequer a hipótese de recorrer aos conhecimentos sobre a relação entre a função derivada e a função original. Schoenfeld (1992) refere que o mais importante não é ter os conhecimentos mas sim saber quando e como se podem utilizar, pelo que a forma como a generalidade dos alunos reagiu a este problema reforça a importância do controlo na atividade de resolução de problemas, tal como é defendido amplamente pelo autor.

Penso que o principal motivo pelo qual os alunos sentiram dificuldades em iniciar a resolução deste problema prende-se com o facto de não terem compreendido que para estudar a evolução da população poderiam analisar o sentido de variação da função e os seus extremos de forma a verificar os períodos em que a função (e consequentemente a população) cresce ou decresce. No entanto, acredito também que grande parte dos alunos, não sabendo como poderia dar resposta ao problema, seguiu as orientações da alínea b) e calculou a taxa de variação para os anos que faltavam. Assim, fica reforçada a ideia, referida por vários autores nomeadamente Threfall (2002), de que por vezes os alunos recorrem a experiências anteriores para gerar as suas estratégias. Neste caso, tal como se pode perceber pelas resoluções apresentadas acima, a estratégia pela qual optaram não permite dar uma resposta adequada ao problema e, mais do que isso, não foi aplicada de forma correta. Tal como sugere Ponte (2010) é frequente os alunos desenvolverem significados parciais que, muitas vezes envolvem sérios equívocos. Neste caso, os alunos revelaram assim não compreender o significado de taxa de variação num ponto (neste caso num determinado ano), o que acabou por influenciar toda a resolução do problema.

O facto de dois alunos terem optado por esboçar um gráfico referente à taxa de variação remete também para a investigação de Threfall (2002), uma vez que os alunos nunca tinham contactado com este tipo de abordagem a um problema e, portanto, a estratégia emergiu tendo em conta as características dos mesmos, nomeadamente, as suas preferências pessoais.

A aluna que optou por construir um quadro de sinal da derivada para analisar o sentido de variação e os extremos da função original revelou um bom entendimento do enunciado e, mais do que isso, mostrou aceder facilmente a conhecimentos prévios no contexto de resolução de problemas. Resolveu o problema de uma forma simples e correta, evidenciando um uso eficiente dos recursos disponíveis e pude constatar que realizou aprendizagens bastante sólidas a nível dos procedimentos. Além disso, revelou uma boa capacidade de interpretação do contexto do problema, uma vez que o quadro de sinal foi construído apenas para os valores referentes aos anos do período em estudo.

Relativamente aos alunos que optaram por determinar a população da urbanização em cada um dos anos não se registou qualquer erro. No entanto, penso que na base desta opção pode estar o facto de considerarem que os conteúdos lecionados ao longo da unidade de ensino não se poderiam aplicar ao problema em questão, o que revela aprendizagens pouco sólidas neste âmbito.

Finalmente no que se refere à resposta final ao problema, verificou-se mais uma vez que os alunos resistem a dar respostas completas, o que particularmente no caso deste problema tem uma importância fortíssima. Além de muitos alunos terem resumido as respostas à evolução da taxa de variação, mesmo para os outros verificou-se que não compreenderam que informações deveriam dar para responder a um problema como este.

De referir ainda que quatro alunos não apresentaram qualquer resolução, sendo que uma das alunas não compreendeu o pretendido e acabou por desistir, dois alunos tiveram bastantes dificuldades na questão anterior não tendo tempo para iniciar esta e um aluno, tal como anteriormente, não mostrou qualquer interesse em, pelo menos, ler o enunciado.

5.4. Problema 1.3. da Ficha de Trabalho n.º 3

Tal como o Problema 4 da Ficha de Trabalho n.º 2, este problema (Anexo 2.8.) apresenta uma função polinomial de terceiro grau e uma situação contextualizada e permite analisar a evolução dos alunos quanto às estratégias utilizadas e a forma como recorreram aos seus conhecimentos sobre derivadas. Darei uma atenção particular à interpretação que os alunos fizeram do problema e à forma como respondem à questão colocada.

1. Num determinado dia, junto às bilheteiras de um estádio de futebol, o número de pessoas na fila para tentar comprar bilhetes para um jogo decisivo da Liga dos Campeões, desde as 8h (abertura da bilheteira) até as 18h (encerramento da bilheteira) é dado pelo seguinte modelo matemático:

$N(t) = 20t^3 - 150t^2 + 240t + 323$, t em horas.

(a) Indica o número de pessoas que estavam na fila à hora que abriu a bilheteira.

(b) Quantas pessoas estavam ainda na fila quando a bilheteira encerrou?

(c) Determina o número mínimo de pessoas que estiveram na fila ao longo deste período. A que horas isso ocorreu?

Figura 46 – Tarefa 1 da Ficha de Trabalho n.º 3

Compreensão do Problema

A tarefa que está na base desta análise (Figura 46) é constituída por três questões, sendo a última o problema de otimização. Tendo em conta que todos os alunos resolveram de forma acertada as duas primeiras questões, penso que o contexto implícito no problema foi compreendido facilmente. Mais uma vez, os alunos não fizeram qualquer pergunta sobre o enunciado o que, tendo em conta a sua falta de autonomia, revela que não sentiram dificuldades na sua interpretação.

Execução do plano

De forma semelhante ao que ocorreu nos problemas anteriores, os alunos optaram, na sua maioria (88%), por recorrer aos seus conhecimentos sobre derivadas para resolver a situação em questão (Tabela 8).

Estratégia adotada	N.º de alunos (n=18)	% de alunos
Recorre à noção de derivada e utiliza a calculadora gráfica	16	88%
Não recorre à noção de derivada	1	6%
Não resolve	1	6%

Tabela 8 - Tipo de estratégia utilizado pelos alunos na resolução do Problema 1.3. da Ficha de Trabalho n.º 3

Mais uma vez registou-se uma aluna, a Nádia, que optou por resolver o problema com o auxílio da calculadora gráfica, calculando o número de pessoas que esteve na fila para cada hora do período apresentado (Figura 47). De notar que, além de demorado, este método poderia não conduzir à resposta correta, uma vez que a aluna só calculou o número de pessoas na fila para valores inteiros, à semelhança do que tinha feito em problemas anteriores.

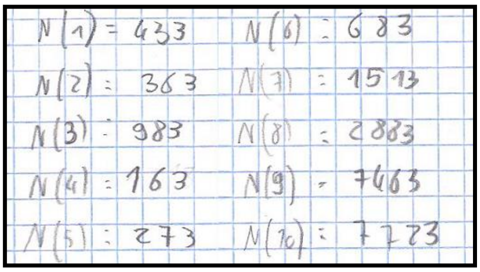


Figura 47 - Resolução da Nádia do Problema 1.3. da Ficha de Trabalho n.º 3

Todos os outros alunos que resolveram este problema começaram por determinar a função derivada através das regras de derivação. De notar que este processo foi executado de forma correta por todos. Em seguida, os alunos calcularam os zeros da função derivada. Verifica-se que estes não sentem dificuldades em aplicar a fórmula resolvente quando os coeficientes são inteiros (mesmo no caso deste problema em que eram valores relativamente grandes), uma vez que todos resolveram a equação $N'(t) = 0$ corretamente.

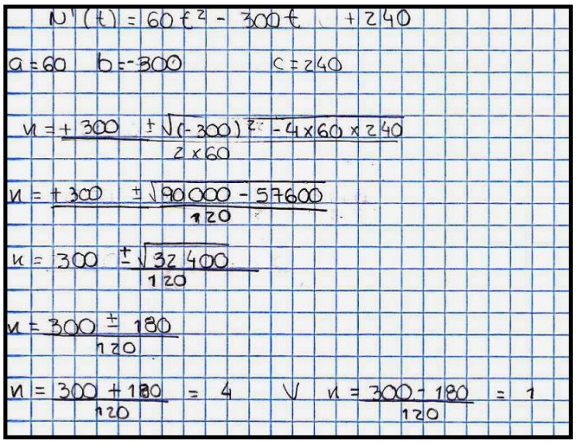


Figura 48 - Cálculo dos zeros da função derivada da função do Problema 1.3. da Ficha de Trabalho n.º 3, realizada pela Melissa

A aluna apresenta os valores corretos, mas pode verificar-se que, embora a expressão inicial esteja definida em função de t, assim que começa a desenvolver a fórmula resolvente passa a usar a letra x. Outros três colegas fizeram esta “mudança de variável”, o que, na minha opinião, evidencia uma certa mecanização da fórmula resolvente, utilizada desde o 9.º ano, recorrendo na maioria das vezes à letra x.

Este uso abusivo da letra x para representar a variável em questão observa-se também nos quadros de sinal da derivada. Sete alunos que resolveram o problema recorrendo à relação entre o sinal da função derivada, sentido de variação e extremos da função original construíram um quadro de sinal onde colocam a letra x, como pode ser observado na resolução da aluna Carla (Figura 49)

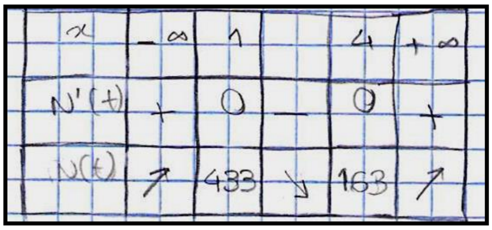


Figura 49- Quadro de sinal da derivada construído pela Carla, na resolução do Problema 1.3. da Ficha de Trabalho n.º 3

De notar ainda o caso particular da aluna Andreia (Figura 50) que constrói o quadro denominando a função derivada por t e a função original por t'.

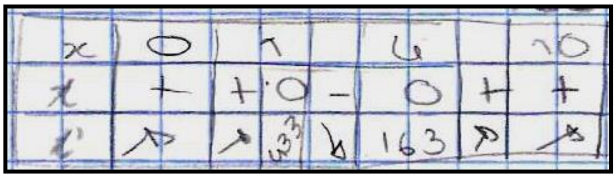


Figura 50 - Quadro de sinal da derivada construído pela Andreia, na resolução do Problema 1.3. da Ficha de Trabalho n.º 3

Apesar de não excluir a hipótese de desatenção por parte da Andreia, penso que esta troca entre as designações das funções original e derivada e o facto de recorrer à letra t (que neste problema era a variável) decorrem efetivamente das dificuldades da aluna neste tópico, dado que este foi o primeiro problema que resolveu através da relação entre o sinal da função derivada, o sentido de variação e extremos da função original. Deste modo, embora tenha revelado bastantes falhas na execução dos processos, não posso deixar de referir que o facto de a Andreia ter tentado resolver o problema através das derivadas é uma evolução muito positiva e dá indícios de que a aluna foi ganhando confiança para aplicar o mesmo método que a maioria dos colegas, possivelmente, como consequência do momento de discussão coletiva em que as resoluções eram apresentadas.

Há ainda a destacar que todos os alunos que construíram o quadro de sinal observaram o sinal da função derivada através da calculadora gráfica (Figura 51). Tal como referi, a maioria dos alunos construiu o quadro corretamente, no entanto, existe uma aluna, a Isabel, (Figura 52) que preencheu as respetivas entradas (dos valores máximo e mínimo), como sendo zeros da função original.

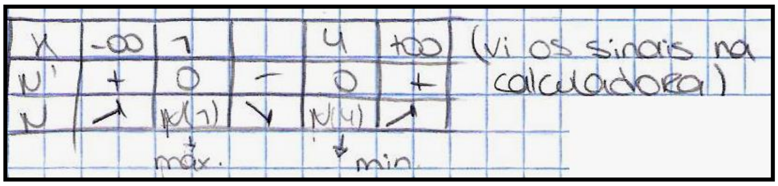


Figura 51 - Quadro de sinal da derivada construído pela Mariana, na resolução do Problema 1.3. da Ficha de Trabalho n.º 3

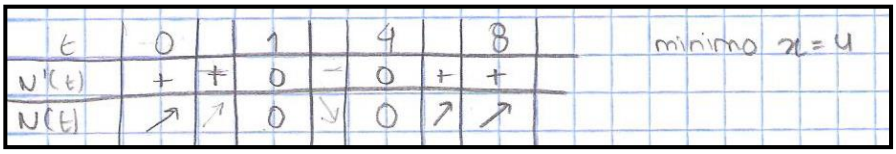


Figura 52- Quadro de sinal da derivada construído pela Isabel, na resolução do Problema 1.3. da Ficha de Trabalho n.º 3

Uma vez que a Isabel revelou aprendizagens sólidas ao longo da unidade, tendo resolvido acertadamente a maioria dos problemas envolvidos neste estudo e preenchido os respetivos quadros de sinal corretamente, penso que este terá sido um caso de desatenção, até porque a aluna só constrói o quadro até 8, o que não vai ao encontro do enunciado. De notar que a aluna identifica de imediato o minimizante, recorrendo aos conhecimentos sobre a relação entre o sinal da função derivada e o sentido de variação e extremos da função original.

De ressalvar ainda que ao contrário do que aconteceu em outros problemas semelhantes, o número de alunos que construiu o quadro de sinal apenas para valores a partir de zero (oito), como por exemplo a Andreia e a Isabel (Figuras 50 e 52), é superior ao de alunos que incluíram todos dos todos os valores (sete) (Figura 51), o que confirma uma boa interpretação do problema.

Dos 16 alunos que optaram por resolver este problema recorrendo à relação entre o sinal da função derivada, sentido de variação e extremos da função original, apenas um não construiu o quadro de sinal da derivada. Deste modo, um aluno, o Afonso, identicamente à forma como procedeu em problemas anteriores, considerou de imediato que os zeros da derivada correspondiam aos extremos da função original. Apesar de isto demonstrar um bom raciocínio, revela que o Afonso, tal como anteriormente, desconsidera os casos em que a função derivada não muda de sinal e portanto os seus zeros não correspondem aos extremos da função original. Além disso, uma vez que foram feitas discussões coletivas de alguns dos problemas anteriores, o facto de o Afonso insistir em não considerar o sinal da função derivada e o sentido de variação da função original permite-me conjeturar que ele acredita que a sua resolução é suficiente e completamente correta. O Afonso é dos alunos mais participativos na aula de Matemática, mostrando-se, na maioria dos casos, bastante concentrado e empenhado pelo que não considero que esta lacuna se deva a falta de atenção.

Análise retrospetiva

Após resolverem o problema, 88% dos alunos responderam à questão colocada, no entanto, apenas 41% deram uma resposta completa de acordo com o pretendido no enunciado (Tabela 9). Dos três alunos que não responderam, um não realizou o problema.

Apresentação de resposta final	N.º de alunos (n=18)	% de alunos
Apresenta uma resposta completa	7	41%
Apresenta uma resposta incompleta	8	47%
Não responde	3	12%

Tabela 9 - Apresentação da resposta final ao Problema 1.3 da Ficha de Trabalho n.º 3

Dos 15 alunos que responderam à questão, sete apenas indicaram o horário em que tinha ocorrido o número mínimo de pessoas na fila, não indicando esse número. Desses, apenas dois alunos referiram que a concentração mínima de pessoas tinha ocorrido às 12horas revelando assim ter em consideração o horário em que a bilheteira abriu. Os outros cinco responderam apenas "4 horas após a abertura". Outros sete alunos deram nas suas respostas informações sobre o número mínimo de indivíduos na fila e o horário em que tal ocorreu, no entanto, dois destes não se referiram à hora exata respondendo apenas "4 horas após a abertura" (Figura 53).

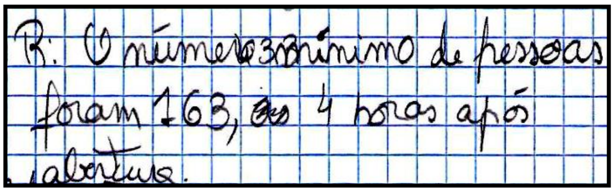

R: O número mínimo de pessoas foram 163, às 4 horas após abertura.

Figura 53 - Resposta do Afonso ao Problema 1.3. da Ficha de Trabalho n.º 3

Os restantes cinco deram então respostas completas e contextualizadas como pode ser visto, por exemplo, na resposta da aluna Mariana, Figura 54.

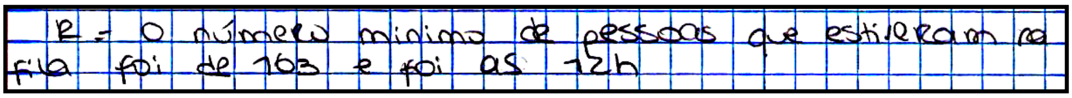

R = O número mínimo de pessoas que estiveram na fila foi de 163 e foi as 12h

Figura 54- Resposta da Mariana ao Problema 1.3. da Ficha de Trabalho n.º 3

De todos os alunos que responderam ao problema resta ainda analisar o caso do Marco que apresenta a seguinte resposta (Figura 55):

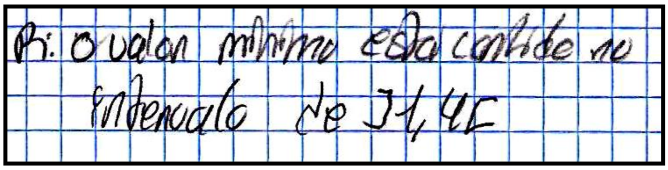

R: O valor mínimo esta contido no intervalo de]1,4[

Figura 55- Resposta do Marco ao Problema 1.3. da Ficha de Trabalho n.º 3

Esta resposta não era expectável até porque nos outros problemas o Marco não tinha evidenciado dificuldades. Além disso, o facto de afirmar que o valor mínimo está no intervalo aberto de extremos um e quatro não é coerente com nenhuma das aprendizagens realizadas, nem com a questão do enunciado. Apesar de acreditar que se tratou de uma falta de atenção, esta resposta demonstra dificuldades em retirar conclusões dos processos desenvolvidos ao longo da resolução do problema. Apesar de nos outros problemas o Marco ter respondido adequadamente, analisando apenas esta resposta poderia pensar que o aluno desenvolveu conhecimentos pouco sólidos no que se refere à resolução de problemas de otimização.

Síntese

De uma forma geral considero que os objetivos estabelecidos para este problema foram cumpridos e a maioria dos alunos não evidenciou dificuldades. Tal como em problemas anteriores, os alunos revelaram facilidade em compreender o enunciado e a estratégia mais utilizada foi a aplicação dos conhecimentos sobre derivadas, recorrendo à relação entre o sinal da função derivada, o sentido de variação e extremos da função original. Como já vem sendo hábito, não se registaram quaisquer dificuldades na aplicação das regras de derivação, o que demonstra que os alunos realizaram aprendizagens sólidas nesta temática. Registam-se, no entanto, algumas lacunas em pormenores da resolução, nomeadamente, o facto de os alunos utilizarem variáveis incoerentes com a função apresentada no problema.

Mais uma vez os alunos recorreram massivamente à calculadora gráfica de modo a estudar o sinal da função derivada. Mesmo a Leonor, que nos problemas iniciais optou por fazer um esboço das funções sem recorrer a esta ferramenta, acabou por aderir também ao mesmo método que os colegas, possivelmente porque percebeu que era mais rápido e evitava erros.

De notar o caso de um aluno que apesar das discussões coletivas realizadas anteriormente, continua a assumir que os zeros da derivada correspondem aos extremos da função original, não considerando os casos em que tal não acontece. Assim, permito-me conjeturar que ele não compreendeu porque é que o processo em questão permite determinar os extremos de uma função. A abordagem deste aluno vai ao encontro do que é referido por Selden, Mason, e Selden (1989) e Selden, Selden, & Mason (1994) (citados em Swanagan, 2012), isto é, que muitas vezes, os alunos aplicam os procedimentos sem saber porque é que eles realmente funcionam.

Outro dos casos a ter em conta é o caso da Nádia. Apesar de nas discussões coletivas ter sido enfatizada a eficácia das várias estratégias, esta aluna continua a optar por calcular cada um dos valores na calculadora. Sendo este um processo demorado e que não garante a obtenção do resultado correto, a opção da Nádia reforça, mais uma vez, a importância que os atributos do próprio indivíduo têm na emergência da estratégia de resolução (Threfall, 2002). Assim, embora se possa tratar de uma preferência pessoal, creio que a resistência da Nádia em recorrer à relação entre o sinal da função derivada, sentido de variação e extremos da função original se deve à sua falta de conhecimentos neste âmbito, bem como à falta de confiança nas suas capacidades.

Mais uma vez registaram-se erros nas resoluções que remetem para a falta de atenção dos alunos. Este facto reforça a ideia, tantas vezes debatida pelos professores desta turma, que a maioria dos alunos é extremamente prejudicada pela sua falta de atenção e concentração.

Relativamente à interpretação do problema verificou-se uma evolução positiva, tanto na forma como muitos alunos construíram o quadro de sinal da derivada incluindo apenas os valores maiores que zero, como nas respostas dadas no final do problema. Estabelecendo uma relação com os problemas anteriores, nota-se uma evolução positiva o que evidencia a importância da experiência na resolução de problemas. Apesar de algumas das respostas estarem incompletas, os alunos tiveram a preocupação de adequar a resposta ao enunciado, nomeadamente, mesmo aqueles que não responderam “às 12h”, disseram que o número mínimo de pessoas na fila ocorreu “4 horas após a abertura da bilheteira”. No entanto, não posso deixar de referir o caso de alunos que continuam a não responder com todas as informações necessárias, o que revela uma desconsideração da importância de responder a um problema de forma completa e de acordo com o contexto. Tal como já referi na análise de problemas anteriores, penso que a maioria dos alunos partilha a ideia intrínseca de que a Matemática se resume a uma série de processos e cálculos, acreditando que para resolver um problema é apenas necessário aplicar de forma correta todos os procedimentos, sendo a resposta final um pormenor secundário.

5.5. Problema 3 da Ficha de Trabalho n.º 3

Este problema (Anexo 2.8.) é bastante diferente dos anteriores uma vez que indica expressamente que os alunos devem recorrer à calculadora gráfica na sua resolução. Uma vez que o problema em si é bastante simples, a análise incidirá essencialmente na forma como os alunos utilizam a calculadora gráfica. Tal como o enunciado indica (Figura 56) os alunos deverão apresentar uma resolução detalhada, pelo que um dos principais focos desta análise será perceber se cumprem, ou não, as exigências do enunciado.

3. A figura representa uma ponte antiga em Lavertezzo, na Suíça. O seu arco tem uma altura (em metros) que é dada aproximadamente por uma parábola de equação

$h(x) = -1{,}25x^2 - 37x + 123$, num certo sistema de eixos coordenados.

Determina, recorrendo à calculadora gráfica, as coordenadas do ponto mais alto do arco (aproximadas às décimas).

Nota: Deves justificar todos os passos, e apresentar o gráfico que visualizaste na calculadora bem como todos os comandos que utilizaste.

Figura 56 – Problema 3 da Ficha de Trabalho n.º 3

Compreensão do Problema

O enunciado deste problema foi facilmente compreendido pelos alunos não havendo qualquer dificuldade a registar.

Execução do Plano

Tendo em conta o enunciado, os alunos perceberam de imediato que teriam de determinar o máximo da função através das capacidades da calculadora gráfica. De notar que no início vários alunos me questionaram sobre a hipótese de resolverem o problema analiticamente porque era "muito mais fácil" e "não gostamos de usar a calculadora para resolver tudo, apenas para os cálculos". No entanto, após explicar que deviam recorrer exclusivamente à calculadora gráfica e que era importante familiarizarem-se com outras potencialidades desta ferramenta que não apenas o cálculo, os alunos acabaram por aderir à tarefa.

Apenas um aluno não realizou esta tarefa, uma vez que tal como em todas as aulas adotou uma postura de desinteresse. Assim, os 24 alunos que realizaram o problema inseriram a expressão na calculadora e em seguida visualizaram o gráfico, indicando no seu registo escrito os comandos usados (Figura 57). De notar que nem todos os alunos têm o mesmo modelo de calculadora gráfica pelo que os comandos a utilizar podem divergir entre si.

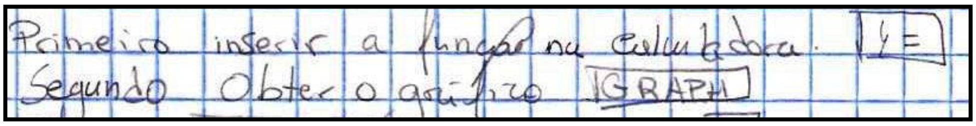

Primeiro inserir a função na calculadora. Y=
Segundo Obter o gráfico GRAPH

Figura 57- Indicação dos comandos necessários para visualizar o gráfico na resolução do Problema 3 da Ficha de Trabalho n.º 3, realizado pela Nicole

Uma vez que com a janela *standard* da calculadora gráfica não conseguiam ver o vértice da parábola, foi necessário ajustar a janela (Figuras 58 e 59). Apesar de, no início, os alunos acharem que a função não estava bem escrita e que "não ia dar para resolver o problema" acabaram por compreender que o ajustamento da janela iria resolver essa situação. De notar, no entanto, que embora os alunos já trabalhassem com a calculadora gráfica desde o 10.º ano, muitos não sabiam onde ajustar a janela e tiveram bastantes dificuldades em escolher valores adequados.

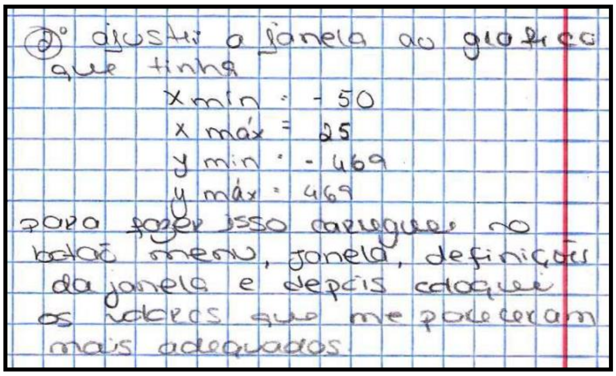

2º ajustei a janela do gráfico que tinha
xmín = -50
x máx = 25
y mín = -469
y máx = 469
para fazer isso carreguei no botão menu, janela, definições da janela e depois coloquei os valores que me pareceram mais adequados.

Figura 58 - Indicação do ajustamento da janela de visualização, na resolução do Problema 3 da Ficha de Trabalho n.º 3, realizado pela Andreia

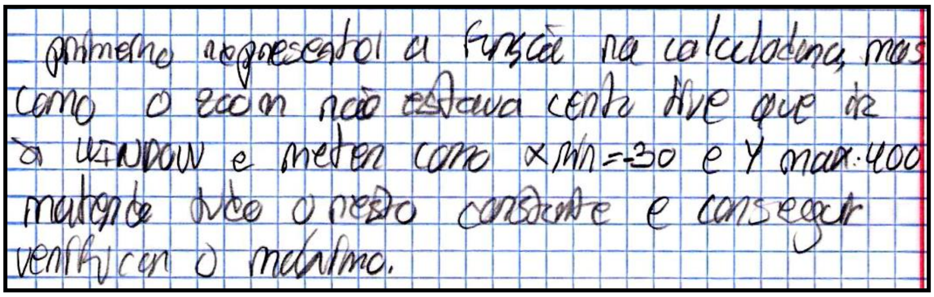

primeiro apresentei a função na calculadora, mas como o ecrã não estava certo tive que ir à WINDOW e meter como xmin=-30 e Y max:400 mantendo todo o resto constante e consegui verificar o máximo.

Figura 59 - Indicação do ajustamento da janela de visualização, na resolução do Problema 3 da Ficha de Trabalho n.º 3, realizado pelo Marco

Depois de algum tempo a explorar as várias janelas, os alunos conseguiram então visualizar o vértice da parábola, obtendo um gráfico semelhante ao apresentado pela Carla (Figura 60).

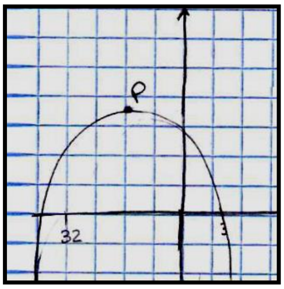


Figura 60- Esboço do gráfico apresentado pela Carla, na resolução do Problema 3 da Ficha de Trabalho n.º 3

Apesar de quatro alunos terem indicado, no seu esboço, os zeros (aproximados) da função, apenas a Carla teve o cuidado de os calcular, também através da calculadora gráfica, de modo a esboçar o gráfico o mais rigorosamente possível (Figura 61).

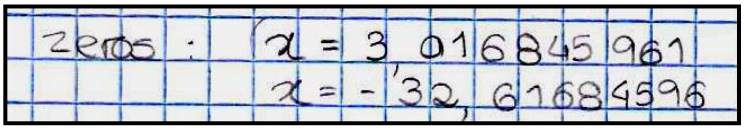


Figura 61 - Indicação dos zeros da função $h(x)$, na resolução do Problema 3 da Ficha de Trabalho n.º 3, feita pela Carla

Todos os outros colegas que representaram o gráfico na folha de resolução optaram por um esboço sem a indicação dos pontos de interseção com o eixo Ox, como se pode ver por exemplo na Figura 62.

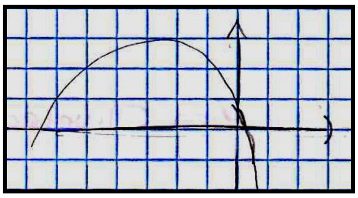


Figura 62- Esboço do gráfico apresentado pela Leonor na resolução do Problema 3 da Ficha de Trabalho n.º 3

Ao contrário destes alunos, nem todos reproduziram na folha de resolução o gráfico observado (Tabela 10), apesar de essa indicação ser dada expressamente no enunciado.

Apresentação do gráfico	N.º de alunos (n=25)	% de alunos
Apresenta o gráfico	15	60%
Não apresenta o gráfico	9	36%
Não resolve	1	4%

Tabela 10 - Apresentação do gráfico do Problema 3 da Ficha de Trabalho n.º 3

Após a visualização do gráfico, a maioria dos alunos reconheceu de imediato que para determinar o máximo teria de recorrer a um dos comandos da calculadora. Embora três alunos afirmassem não saber em que tecla carregar de modo a encontrar os comandos que permitem calcular o máximo, após perguntarem aos colegas recordaram-se de imediato. Assim, à exceção das alunas que têm as calculadoras gráficas Texas Inspire (Figura 64) e Casio fx-9860GII (Figura 65), todos os outros (que têm TI 82,83 ou 84) procederam de forma semelhante à Julieta (Figura 63)

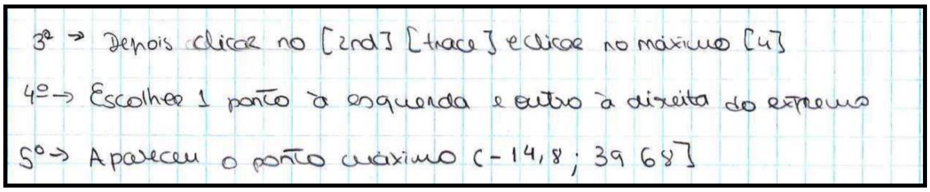


Figura 63 - Indicação dos comandos utilizados para determinar o ponto de máximo da função, na resolução do Problema 3 da Ficha de Trabalho n.º 3, realizado pela Julieta.

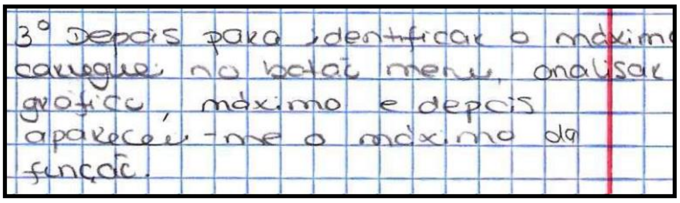


Figura 64- Indicação dos comandos utilizados para determinar o ponto de máximo da função, na resolução do Problema 3 da Ficha de Trabalho n.º 3, realizado pela Andreia com a calculadora Texas Inspire

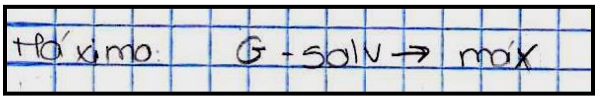


Figura 65- Indicação dos comandos utilizados para determinar o ponto de máximo da função, na resolução do Problema 3 da Ficha de Trabalho n.º 3, realizado pela Carla com a calculadora Casio fx-9860GII

Tal como a Julieta (Figura 63), todos os alunos indicaram as coordenadas do ponto de máximo obtidas através da calculadora, apesar de apenas nove dos 15 que esboçaram o gráfico, indicarem expressamente esse ponto no esboço (Figura 66).

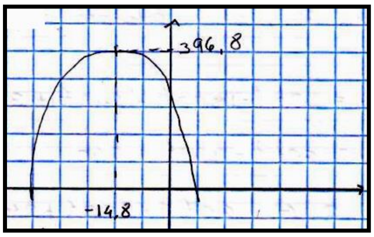


Figura 66- Esboço do gráfico apresentado pela Tânia na resolução do Problema 3 da Ficha de Trabalho n.º 3

Apesar de todos os alunos identificarem corretamente e sem dificuldades o ponto de máximo, o enunciado deste problema exigia que indicassem na sua folha de resolução a forma como determinaram este ponto e nem todos o fizeram (Tabela 11).

Apresentação dos comandos	N.º de alunos (n=25)	% de alunos
Apresenta todos os comandos utilizados	10	40%
Apresenta apenas alguns dos comandos	12	48%
Não apresenta nenhum comando	2	8%
Não resolve	1	4%

Tabela 11 - Apresentação dos comandos utilizados na resolução do Problema 3 da Ficha de Trabalho n.º 3

Tal como indicado na Tabela 11, apenas 40% dos alunos respeitaram o pedido do enunciado e apresentaram, com ou sem o gráfico, todos os passos da sua resolução (Figura 67).

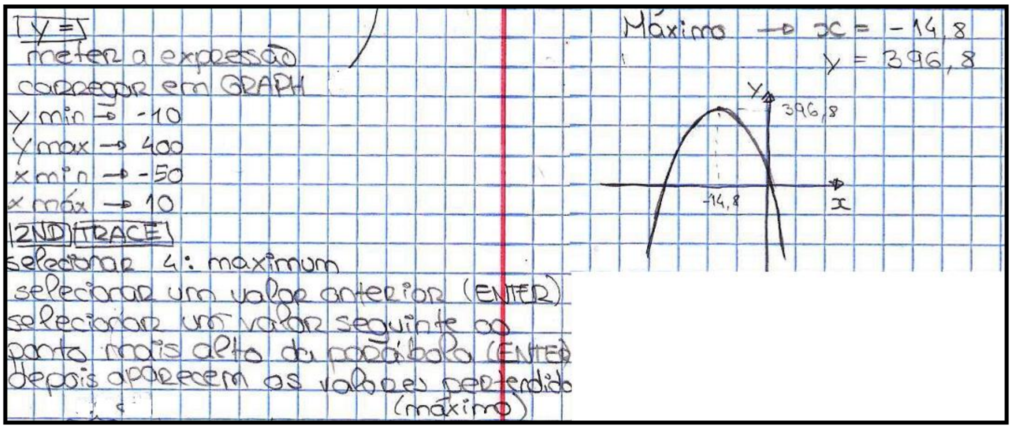


Figura 67 - Resolução da Laura do Problema 3 da Ficha de Trabalho n.º 3

Os outros alunos (48%) apresentaram uma ideia muito geral, como por exemplo, a Sara (Figura 68).

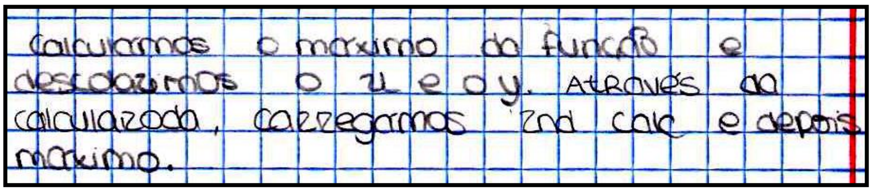


Figura 68 - Indicação dos comandos utilizados para determinar o ponto de máximo da função, na resolução do Problema 3 da Ficha de Trabalho n.º 3, realizado pela Sara

Estas resoluções evidenciam que os alunos provavelmente não têm a noção da importância de indicar de que forma utilizaram a calculadora gráfica. Permito-me conjeturar que os alunos acreditam que numa tarefa resolvida através da calculadora gráfica é suficiente dar apenas uma resposta no final, uma vez que os procedimentos que fizeram já são conhecidos do professor. Esta ideia é corroborada pela resolução de duas alunas (Figura 69), dado que as suas produções partem do pressuposto que o professor conhece todos os comandos que utilizaram.

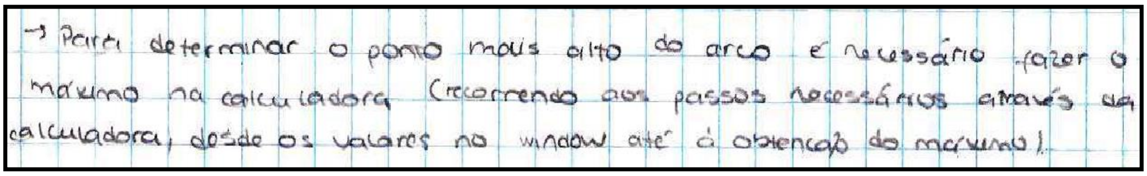


Figura 69 - Indicação dos comandos utilizados para determinar o ponto de máximo da função, na resolução do Problema 3 da Ficha de Trabalho n.º 3, realizado pela Mónica

Análise Retrospetiva

No final do problema, 68% dos alunos deram uma resposta (Tabela 12). De referir no entanto que dos 32% que não responderam, um aluno não realizou o problema.

Apresentação da resposta final	N.º de alunos (n=25)	% de alunos
Apresenta uma resposta completa	12	48%
Apresenta uma resposta incompleta	5	20%
Não responde	8	32%

Tabela 12 - Apresentação da resposta final ao Problema 3 da Ficha de Trabalho n.º 3

Dos 12 alunos que deram uma resposta completa, a maioria (dez alunos), respondeu de forma semelhante à Carolina (Figura 70).

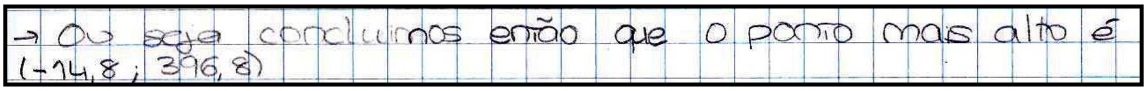

→ Ou seja concluimos então que o ponto mais alto é (-14,8 ; 396,8)

Figura 70- Resposta da Carolina ao Problema 3 da Ficha de Trabalho n.º 3

Os outros dois alunos deram uma resposta bastante idêntica entre si onde referem o ponto "mais alto da ponte" (Figura 71).


3- R: O ponto mais alto da ponte tem de coordenadas (-14,8 ; 396,8)

Figura 71- Resposta do Nuno ao Problema 3 da Ficha de Trabalho n.º 3

Esta resposta demonstra alguma dificuldade em compreender que a expressão indicada no enunciado modela apenas a altura do arco num determinado sistema de coordenadas e não verdadeiramente a ponte. Penso que os alunos percebem que na realidade não podemos falar em pontos da ponte, a menos que lhe apliquemos um sistema de eixos. No entanto, estas respostas revelam alguma desatenção e falta de espírito crítico.

Apesar de apenas dois alunos referirem as coordenadas da ponte, durante a resolução do problema existiram algumas dúvidas, uma vez que os alunos não compreendiam o porquê de a abcissa poder ser negativa. Assim, fui solicitada algumas vezes para verificar se o ponto encontrado estava correto, com vários alunos a afirmar que "o x não pode ser negativo uma vez que é uma medida". Esta ideia partilhada por alguns alunos não deixa de revelar que têm atenção ao contexto, no entanto, mostra que não compreendem verdadeiramente o que significa aplicar um sistema de coordenadas. Deste modo, considero que a origem desta confusão remete para uma possível associação que os alunos fizeram entre as coordenadas do ponto e as medidas da ponte.

Penso que as respostas incompletas dadas neste problema se relacionam justamente com este facto, uma vez que cinco alunos referiram apenas a altura máxima (Figura 72).

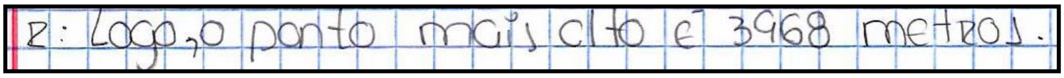


Figura 72- Resposta da Melissa ao Problema 3 da Ficha de Trabalho n.º 3

A resposta da Melissa revela que prestou atenção ao enunciado e compreendeu que a função dada apenas modela a altura do arco. No entanto, revela que no final do problema não verificou se respondeu de acordo com a questão colocada onde eram expressamente pedidas as coordenadas do ponto. Além disso, demonstra alguma incoerência na linguagem, referindo-se a um ponto como a altura do arco.

Finalmente referir que, tal como em problemas anteriores, ainda existem alguns alunos que resistem a responder ao problema, demonstrando, mais uma vez, um desmerecimento da importância desta fase. Uma vez que o enunciado pedia apenas as coordenadas do ponto mais alto, penso que alguns alunos poderão ter acreditado que como já tinham indicado as coordenadas nas suas resoluções quando determinaram o ponto máximo, não seria necessário responder no final. No entanto, este facto leva-me a conjeturar que possivelmente os alunos não consideram a resposta como uma fase específica da resolução de problemas.

Síntese

Uma vez que o objetivo deste problema foi promover um maior contacto com a calculadora gráfica, de modo a demonstrar aos alunos como esta ferramenta pode ser útil na resolução de problemas de otimização, penso que o mesmo foi atingido. De uma forma geral os alunos mostraram facilidade em calcular o máximo da função através da calculadora gráfica, sendo que a maioria reconheceu de imediato que comandos utilizar.

Apesar de, à exceção de um aluno que mais uma vez não tentou resolver o problema, todos terem determinado o ponto correto, verifiquei que se mostraram bastante reticentes no que respeita à resolução através da calculadora gráfica, o que reforça a ideia de que os alunos usam este recurso essencialmente para fazer cálculos aritméticos e para confirmar resultados analiticamente (Doerr & Zangor, 2000). No entanto, apesar da hesitação inicial, os alunos acabaram por aderir à resolução através da calculadora gráfica o que me permite conjeturar que só agiram dessa forma porque não estão habituados a utilizá-la como ferramenta central nas resoluções. Tal como refere Rocha (2012), os alunos têm tendência a utilizar a calculadora apenas da forma e nas circunstâncias em que foram ensinados a fazê-lo, pelo que é essencial que o professor estimule outras abordagens. De referir também que os alunos se mostraram mais empenhados na resolução quando lhes referi que, por norma, existe uma questão em exame para resolver exclusivamente com a calculadora gráfica. Este facto reforça a ideia de que por vezes os alunos se mostram mais atentos e empenhados quando sabem que serão avaliados sobre os conteúdos em questão.

A principal dificuldade que pude verificar ao longo da resolução foi o ajustamento da janela, uma vez que alguns alunos não sabiam os comandos a utilizar, o que demonstra uma falta de conhecimento em relação ao modo de funcionamento da calculadora (Consciência, 2013). Mesmo os alunos que sabiam os comandos a utilizar tiveram dificuldades em obter uma janela apropriada, o que vai ao encontro de estudos de Berry e Graham (2005) onde referem que os alunos evidenciam falta de capacidade em recorrer aos *zooms* e dificuldades na obtenção de uma janela apropriada.

A resolução deste problema revelou também que alguns alunos não sentem qualquer necessidade de explicar os procedimentos que realizam na calculadora gráfica. Assim, embora estivesse bastante claro no enunciado que deveriam apresentar, na folha de resolução, o gráfico e todos os comandos utilizados, apenas seis alunos cumpriram todos os requisitos, esboçando o gráfico e indicando todos os passos efetuados na determinação do máximo da função. No entanto, todos os alunos que resolveram o problema apresentaram o ponto de máximo arredondado às décimas tal como pedido no enunciado, o que revela bastante atenção.

Relativamente às respostas, mais uma vez pude perceber que os alunos desvalorizam esta fase da resolução de problemas sendo que alguns não têm o cuidado de verificar se responderam de acordo com o enunciado. Além disso, alguns alunos evidenciaram dificuldades em responder adequadamente ao problema uma vez que confundiram coordenadas com medidas e pareceram não compreender o que significa aplicar um sistema de eixos em determinada situação. Este facto é bastante preocupante uma vez que os alunos contactam com sistemas de eixos desde o Ensino Básico, embora não me sinta surpreendida por estas dificuldades pois estes são conceitos complexos e que exigem uma forte capacidade de abstração.

5.6. Problema 5. da Ficha de Trabalho n.º 3

A análise da resolução deste problema (Anexo 2.8.) pela turma tem dois objetivos principais. O primeiro é verificar como os alunos reagem a um problema não equacionado. O segundo prende-se com a sua relação com o problema inicial que lhes foi proposto no âmbito deste estudo (Problema 2.(b) da Ficha de Trabalho n.º 2), onde revelaram grandes dificuldades. Obviamente terei também particular interesse nas respostas dos alunos e na forma como estas se adequam ou não ao contexto.

> 5. Uma vidraça retangular com 10m^2 de área é guarnecida por um friso em que o metro linear do material que é utilizado na horizontal custa 2€ e do material que é aplicado na vertical custa 5€. Determina as dimensões da vidraça de modo que o custo do friso seja mínimo e indica o respetivo custo.

Figura 73- Problema 5 da Ficha de Trabalho n.º 3

Compreensão do Problema

Alguns alunos mostraram-se um pouco inseguros sobre a forma como abordar este problema, uma vez que se apresenta em linguagem natural. No entanto, todas as questões que me colocaram remeteram para a forma como iriam representar os dados, verificando-se que a maioria compreendeu o enunciado com bastante facilidade. Muitos alunos afirmaram saber que tinham de determinar o mínimo e que para tal necessitavam de encontrar uma expressão do custo, apesar de não perceberem de imediato como o poderiam fazer. A maioria dos alunos optou por esquematizar a informação, tal como a Tânia ou a Carolina (Figuras 74 e 75), revelando uma interpretação correta do enunciado. De notar que para este problema a espessura do friso é desconsiderada.

Figura 74 - Abordagem inicial ao Problema 5 da Ficha de Trabalho n.º 3, realizada pela Tânia

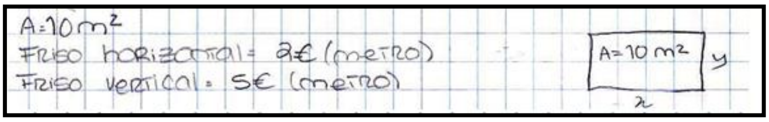


Figura 75- Abordagem inicial ao Problema 5 da Ficha de Trabalho n.º 3, realizada pela Carolina

Execução do plano

Após alguns minutos, todos os alunos que resolveram o problema (76%) optaram por recorrer aos seus conhecimentos sobre derivadas (Tabela 13).

Estratégia adotada	N.º de alunos (n=25)	% de alunos
Recorre à noção de derivada e utiliza a calculadora gráfica	19	76%
Não responde	6	24%

Tabela 13 - Tipo de estratégia utilizado pelos alunos na resolução do Problema 5. da Ficha de Trabalho n.º 3

Inicialmente todos os alunos utilizaram o facto de a área ser 10 m^2 para determinar um dos lados (comprimento ou largura) em função do outro. Apesar de todos os alunos terem adequado os valores do custo indicados no enunciado às variáveis que definiram, isto é, se x for a medida do lado horizontal então cada metro custará 2€ e o mesmo para y, nem todos deram esta indicação de forma correta (Figura 76).

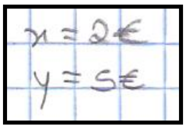


Figura 76 - Parte da resolução da Joana do Problema 5 da Ficha de Trabalho n.º 3

Além da Joana, outros dois alunos optaram por escrever $\boldsymbol{x = 2}$ e $\boldsymbol{y = 5}$ (ou vice-versa) e outro aluno procedeu da mesma forma que o Afonso (Figura 77), indicando o produto do custo pelo respetivo lado como se fosse uma medida.

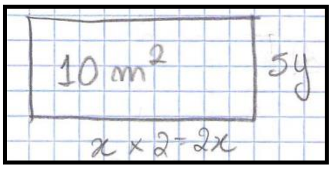


Figura 77- Parte da resolução da Afonso do Problema 5 da Ficha de Trabalho n.º3

Ainda relativamente a esta fase inicial do problema, de referir que 15 alunos optaram por definir $\boldsymbol{y}$ em função de $\boldsymbol{x}$ enquanto quatro definiram $\boldsymbol{x}$ em função de $\boldsymbol{y}$.

Em seguida, os alunos determinaram a função do custo da vidraça e, à exceção de um aluno, todos designaram a função pela letra $\boldsymbol{C}$, o que revela uma boa compreensão do problema e mostra que tiveram atenção ao contexto, não assumindo de imediato que por ser uma função teria de ser representada por $\boldsymbol{f}$.

Alguns dos alunos optaram por considerar primeiro a expressão do perímetro enquanto outros determinaram de imediato a função $\boldsymbol{C}$ (Figura 78).

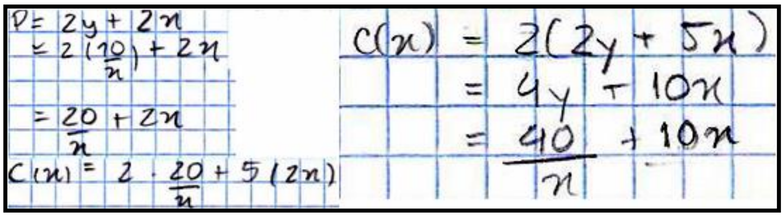


Figura 78- Determinação da função C, realizada pelo Tiago e pela Isabel, respetivamente, na resolução do Problema 5 da Ficha de Trabalho n.º 3

De realçar a resolução do Ricardo (Figura 79) que apesar de obter a mesma expressão que os colegas, revela confundir o dobro com o quadrado de um número uma vez que indica que vai calcular o quadrado da expressão mas acaba por determinar o dobro.

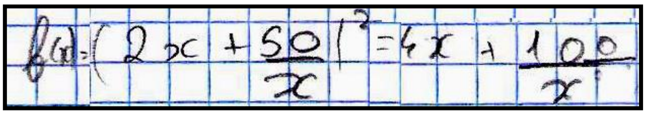


Figura 79- Determinação da função do custo, realizada pelo Ricardo na resolução do Problema 5 da Ficha de Trabalho n.º 3

Ainda relativamente à forma como determinaram C, verifiquei que três alunos começaram por considerar apenas uma vez cada um dos lados. No entanto, logo em seguida acabaram por se aperceber que tal não estava correto adicionando então mais duas parcelas à expressão (Figura 80).

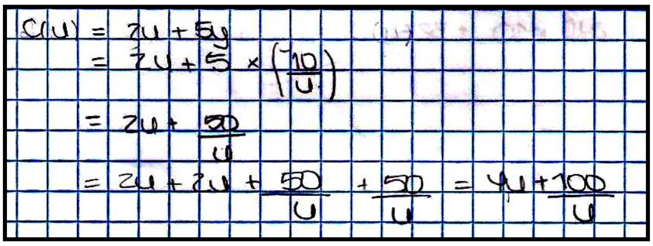


Figura 80 - Parte da resolução da Sara do Problema 5 da Ficha de Trabalho n.º 3

Tal como se pode ver na resolução da Sara, apesar de a aluna emendar o seu erro, em nenhum momento indica que vai considerar outra expressão, prosseguindo com uma sucessão de sinais de igual. Penso que a aluna tem noção que está a considerar duas expressões diferentes e que não assinalou expressamente essa mudança por distração.

Relativamente aos processos envolvendo derivadas, todos os alunos aplicaram corretamente as regras de derivação e em seguida calcularam os zeros da função derivada. Uma vez que a função é racional, 15 alunos optaram por reduzir toda a expressão ao mesmo denominador e indicaram que este (x^2) teria de ser diferente de zero (Figura 81), o que revela uma evolução bastante positiva em relação ao problema 2.(b). Além disso, apenas dois alunos não indicaram que para x^2 ser diferente de zero então x teria de ser diferente de zero.

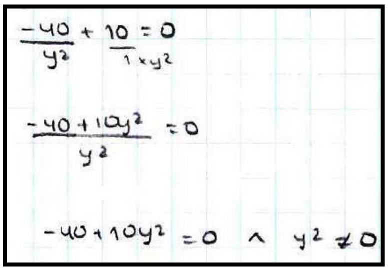


Figura 81- Parte do cálculo dos zeros da função derivada, realizado pela Mónica no Problema 5 da Ficha de Trabalho n.º 3

Apesar de alguns não aplicarem o método corretamente, todos os alunos determinaram os zeros efetivos da função derivada. De notar que, mediante a variável que os alunos escolheram para representar a medida do lado vertical ou horizontal, os valores dos zeros seriam -2 e 2 ou -5 e 5 (como na Figura 82).

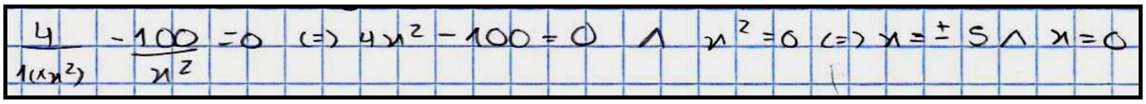


Figura 82- Cálculo dos zeros da função derivada, realizado pela Joana no Problema 5 da Ficha de Trabalho n.º 3

Seguidamente, à exceção do Afonso que, mais uma vez, identifica de imediato o zero positivo da derivada como extremo da função original, todos os alunos construíram um quadro de sinal da derivada (Figura 83).

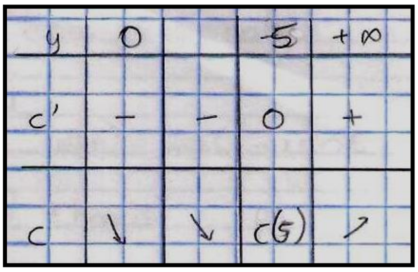


Figura 83- Quadro de sinal da derivada, construído pela Tânia na resolução do Problema 5 da Ficha de Trabalho n.º 3

Como se pode verificar pela imagem, a Tânia optou por construir o quadro de sinal apenas a partir de 0 pelo que não teve quaisquer problemas com restrições do domínio. No entanto, os alunos que construíram o quadro entre $-\infty$ e $+\infty$ tiveram algumas dificuldades em preenchê-lo corretamente. Assim, embora nove dos 15 alunos que consideraram que 0 não pertence ao domínio da função derivada tenham incluído essa indicação no quadro de sinal, o que revela uma grande evolução em relação ao problema 2.(b), onde a maioria dos alunos não se preocupou em fazê-lo, ainda se registaram alguns erros. Assim, quatro alunos apresentaram um quadro semelhando ao da Joana (Figura 84).

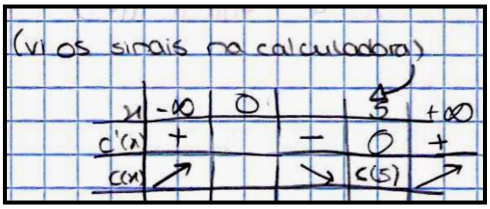


Figura 84- Quadro de sinal da derivada, construído pela Joana na resolução do Problema 5 da Ficha de Trabalho n.º 3

Apesar de não estar errada, esta construção revela que possivelmente os alunos têm noção de que 0 não pertence ao domínio de nenhuma das funções, mas não sabem de que forma devem indicá-lo. Este facto revela desatenção nas aulas anteriores, não só nesta unidade, como ao longo da unidade relativa às funções racionais, uma vez que o símbolo S.S (sem significado) foi utilizado diversas vezes em contextos semelhantes. De notar ainda que o quadro construído pela Joana, não inclui -5, o que apesar de possivelmente se relacionar com o contexto do problema, revela aprendizagens pouco sólidas relativamente à construção do quadro de sinal.

Outros dois alunos apresentam o seguinte quadro (Figura 85), o que revela algumas dificuldades neste âmbito. Assim, os alunos estudaram o sinal da derivada no ponto de abcissa 0, o que mostra claramente que não atribuíram significado ao quadro que construíram. Além disso, mostram não compreender que 0 não pertence ao domínio de C uma vez que o indicam como um zero dessa função.

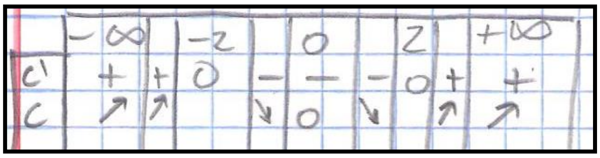


Figura 85- Quadro de sinal da derivada, construído pelo Tiago na resolução do Problema 5 da Ficha de Trabalho n.º 3

Todos os alunos, à exceção da Leonor (Figura 86) e dos dois alunos que referi acima (Figura 85), indicaram no quadro o valor mínimo como sendo $C(2)$ ou $C(5)$ conforme a função que definiram, optando por não calcular diretamente o seu valor.

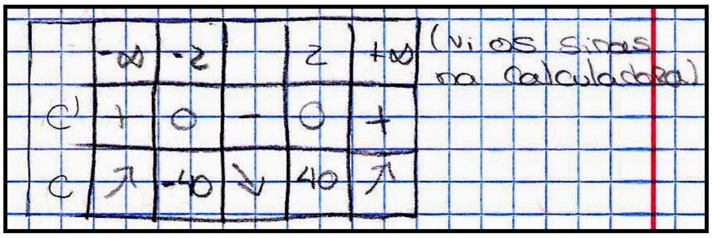


Figura 86- Quadro de sinal da derivada, construído pela Leonor na resolução do Problema 5 da Ficha de Trabalho n.º 3

Ainda relativamente ao quadro de sinal, é de referir o caso de duas alunas que não apresentaram uma representação correta. Assim, como pode ser observado na resolução da Marta (Figura 87), as alunas não consideraram o intervalo entre 0 e 5 e portanto só estudaram o sinal da função derivada, e consequentemente o sentido de variação da função original, a partir de 5. Além de obviamente esta construção não estar correta, as alunas identificam 5 como sendo o minimizante, não existindo qualquer mudança no sentido de variação da função. Uma vez que em problemas anteriores não evidenciaram dificuldades, penso que se tratou de um erro esporádico, no entanto revela conhecimentos pouco sólidos sobre a relação entre o sentido de variação e os extremos de uma função.

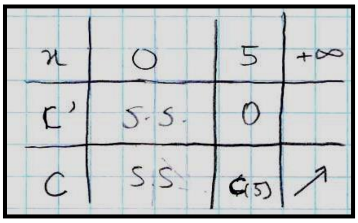


Figura 87 - Quadro de sinal da derivada, construído pela Marta na resolução do Problema 5 da Ficha de Trabalho n.º 3

Finalmente, tal em problemas anteriores, os alunos recorreram massivamente à calculadora gráfica para estudar o sinal da função derivada (como foi observado nas Figuras 84 e 86), sendo que neste problema nenhum aluno optou por esboçar a função em questão.

Análise retrospetiva

Após resolverem o problema, 72% dos alunos respondeu à questão colocada (Tabela 14). No entanto, uma vez que seis alunos não resolveram o problema, apenas um dos alunos que resolveu o problema não deu uma resposta no final. De realçar ainda que mais de metade da turma (52%) apresentou uma resposta completa e totalmente adequada ao enunciado. Aliás, considerando apenas os alunos que resolveram o problema, a percentagem que teve o cuidado de indicar todas as informações pedidas no final da resolução sobe para 68%, o que revela uma evolução muito positiva em relação a problemas anteriores.

Apresentação da resposta final	N.º de alunos (n=18)	% de alunos
Apresenta uma resposta completa	13	52%
Apresenta uma resposta incompleta	5	20%
Não responde	7	28%

Tabela 14 - Apresentação da resposta final ao Problema 5 da Ficha de Trabalho n.º 3

Assim, de uma forma geral as respostas dadas foram muito semelhantes à da Vitória (Figura 88), o que revela uma boa compreensão do pretendido no enunciado e demonstra que os alunos procuraram responder adequadamente ao problema.

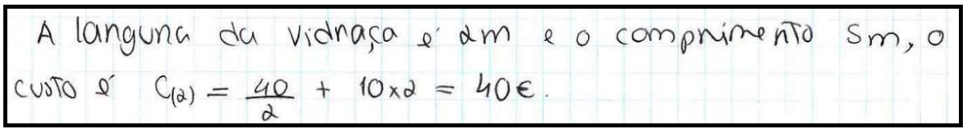


Figura 88 - Resposta ao Problema 5 da Ficha de Trabalho n.º 3, dada pela Vitória

De referir, no entanto, o caso dos cinco alunos que responderam muito sucintamente, sendo que, destes, três indicaram apenas as dimensões da vidraça e dois apenas o custo (Figuras 89 e 90). Apesar de apresentarem uma resposta, esta não inclui todas as informações pedidas no enunciado, pelo que os alunos revelam, tal como em problemas anteriores, pouco empenho em verificar, no final do problema, se responderam totalmente à questão que lhes foi colocada.

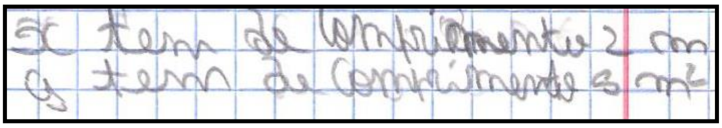


Figura 89- Resposta ao Problema 5 da Ficha de Trabalho n.º 3, dada pelo Nuno

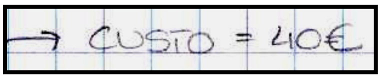


Figura 90- Resposta ao Problema 5 da Ficha de Trabalho n.º3, dada pela Carolina

Relativamente à interpretação do contexto do problema, os alunos revelaram também uma evolução positiva, uma vez mais de metade dos alunos (11) que construíram o quadro de sinal optaram por incluir apenas valores positivos. De referir ainda que sete alunos tiveram o cuidado de excluir das suas resoluções a raiz negativa (Figura 91) indicando que apenas a positiva estaria de acordo com o contexto, o que em relação aos problemas anteriores é um progresso significativo.

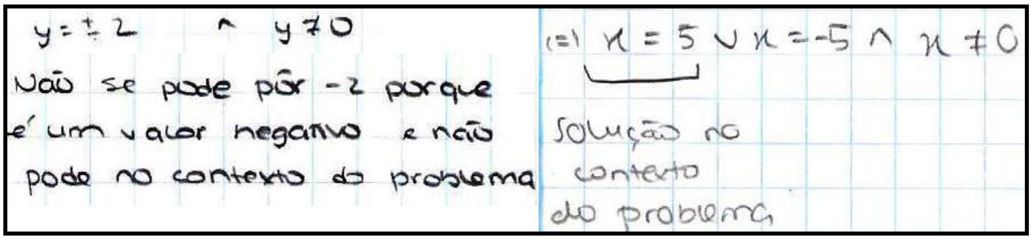


Figura 91- Parte das resoluções do Problema 5 da Ficha de Trabalho n.º 3, realizadas pela Mónica e pela Marta, respetivamente

Ao responderem ao problema alguns alunos evidenciaram dificuldades na definição de comprimento. Assim, as respostas da Tânia (Figura 92) e da Leonor (Figura

93) são exemplos que, aparentemente, revelam que a representação que fizeram no início do problema entrou em conflito com a definição usual de comprimento. Uma vez que geralmente se considera o comprimento como o lado maior, é de estranhar que as alunas afirmem que esta medida será de 2 metros enquanto a largura será 5. No entanto, ao observar os seus retângulos iniciais percebe-se facilmente que ambas associaram x ao comprimento e portanto, no final, ao dar a resposta, possivelmente não prestaram atenção ao número (enquanto medida) que estavam a considerar.

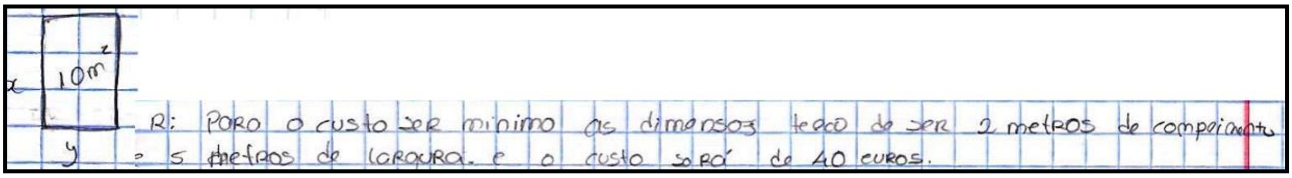


Figura 92- Representação da vidraça e resposta ao Problema 5 da Ficha de Trabalho n.º 3, feitas pela Tânia

Figura 93- Representação da vidraça e resposta ao Problema 5 da Ficha de Trabalho n.º 3, feitas pela Leonor

Síntese

De uma forma geral, os objetivos deste problema foram cumpridos e pude verificar que, na maioria dos casos, os alunos evoluíram positivamente em relação ao problema 2.(b). Uma vez que este foi o primeiro problema não equacionado que resolveram, no momento inicial os alunos sentiram-se um pouco “perdidos”, o que é bastante natural uma vez que segundo Kieran (2007) escrever a equação que traduz o problema de linguagem natural para algébrica é uma área típica de dificuldade. No entanto, após algum tempo os alunos acabaram por equacionar a situação apresentada.

Tal como em problemas anteriores, a estratégia marcante foi a aplicação da relação entre o sinal da função derivada e o sentido de variação e extremos da função original. Mais uma vez não se registaram erros na utilização das regras de derivação e os alunos mostraram uma maior facilidade em trabalhar com funções racionais. O facto de a maioria ter considerado a condição $x \neq 0$, evidencia que prestaram atenção às discussões coletivas e compreenderam a necessidade de excluir os casos em que o denominador se anula. Este facto reforça a importância de discutir e enfatizar na sala de aula a validade do domínio das funções racionais (Consciência, 2013). Apesar de ainda se registarem alguns erros a este respeito nos quadros de sinal, existiu uma evolução positiva em relação ao problema 2.(b) sendo que grande parte dos alunos incluiu a restrição na sua construção.

De realçar também a evolução positiva relativamente à identificação das funções. Assim, em problemas anteriores foi bastante comum que na construção do quadro de sinal os alunos "substituíssem" as funções do enunciado, por exemplo, P, por f, evidenciando falta de atenção e de espírito crítico. No caso deste problema, todos os alunos que optaram por designar a função por C, fizeram-no também no quadro de sinal e ao longo de toda a resolução.

Tal como em problemas anteriores não posso deixar de fazer referência ao caso do Afonso que insiste em identificar de imediato os zeros da função derivada como extremos da função original sem estudar o sentido de variação da mesma, o que revela aprendizagens pouco sólidas neste âmbito.

Relativamente à interpretação do contexto verificou-se um progresso significativo, com muitos alunos a excluírem automaticamente as raízes negativas como zeros da função derivada uma vez que as dimensões do retângulo não poderiam ser números negativos. Além disso, mais de metade dos alunos construíram o quadro apenas para valores a partir de zero, o que revela que compreenderam que mesmo na aplicação de processos matemáticos devem ter o contexto em atenção. Esta evolução vai ao encontro do que é referido por Ponte e Quaresma (2012), isto é, que à medida que os alunos têm mais experiências com problemas semelhantes, vão dando cada vez mais atenção às relações e às estratégias matemáticas.

No que respeita às respostas no final da resolução, os alunos demonstraram uma maior preocupação em responder de forma completa ao que é pedido no enunciado, registando-se o maior número de respostas de todos os problemas realizados. Apesar de a maioria dos alunos ainda responder muito sinteticamente, grande parte das respostas incluíram todas as informações pedidas no enunciado, o que revela que ao longo das aulas relativas à resolução de problemas de otimização os alunos foram assimilando a importância desta fase da resolução.

Finalmente, não posso deixar de referir que seis alunos não resolveram este problema, sendo que cinco não o fizeram por questões de tempo, uma vez que demoraram muito a resolver tarefas anteriores, e um aluno não desenvolveu qualquer atividade tal como sucedeu nos problemas anteriores.

Capítulo 6

Conclusão

6.1. Síntese do estudo

Este estudo tem como principal objetivo compreender como alunos do 11.º ano de escolaridade resolvem problemas de otimização no contexto do tema derivada de uma função. De modo a orientar o estudo formulei as seguintes questões de investigação:

- Que estratégias utilizam os alunos na resolução de problemas de otimização?
- Que conhecimentos sobre a derivada de uma função evidenciam os alunos ao resolverem este tipo de problemas?
- Que dificuldades manifestam no processo de resolução de problemas de otimização?

O estudo tem um carácter qualitativo e interpretativo e foi desenvolvido no âmbito da lecionação da unidade de ensino "Taxa de Variação e Derivada" numa turma de 11.º ano do curso de Ciências Socioeconómicas, da Escola Secundária com 3.º Ciclo de Caneças. As 12 aulas que constituíram a unidade decorreram no 2.º Período do ano letivo de 2014/2015, entre 25 de fevereiro e 20 de março. A recolha de dados ocorreu nas últimas quatro aulas da unidade de ensino e os principais instrumentos foram as produções escritas dos alunos e a observação participante. A análise foi realizada tendo em conta as questões de investigação e organizada segundo as fases de resolução de problemas estabelecidas por Pólya (1957/2004).

6.2. Principais conclusões

Desde o momento inicial, este estudo foi pensado tendo em conta as questões de investigação. Ao selecionar os problemas e posteriormente na análise dos mesmos tive estas questões sempre presentes, sendo que nesta secção procuro dar-lhes resposta e refletir sobre as mesmas.

Que estratégias utilizam os alunos na resolução de problemas de otimização?

Ao analisar as produções escritas dos alunos foi de imediato evidente que estes recorreram aos seus conhecimentos sobre a derivada de uma função, em particular, à relação entre o sinal da função derivada, sentido de variação e extremos da função original, como principal estratégia de resolução dos problemas propostos.

Uma vez que os alunos nunca tinham contactado com este tipo de estratégia fica bastante claro, tal como é referido por Threfall (2002), que as estratégias emergem no contacto com o problema. Obviamente, para um mesmo problema as estratégias podem divergir, isto porque as características do próprio indivíduo são cruciais na elaboração da estratégia (Threfall, 2002). Assim, verificou-se claramente que os alunos com mais dificuldade na disciplina evitaram resolver os problemas recorrendo à relação entre o sinal da função derivada, sentido de variação e extremos da função original. Esta resistência vai ao encontro da importância dos recursos na resolução de problemas, como é defendido, entre outros autores, por Schoenfeld (1989). Desta forma, uma vez que os alunos em questão evidenciaram grandes dificuldades em toda a unidade de ensino, acabaram por não considerar os conteúdos lecionados como um recurso útil para a resolução dos problemas apresentados. De referir, no entanto, que após algumas discussões coletivas, apenas uma aluna manteve a sua estratégia inicial (recorrer à calculadora para determinar alguns pontos da função no domínio indicado de modo a identificar possíveis extremos). Esta aluna sempre se mostrou desinteressada nas aulas não prestando atenção às discussões coletivas e evidenciou em várias ocasiões, nomeadamente nas fichas de avaliação, que não realizou aprendizagens significativas ao longo da unidade.

Tal como sugerem estudos de Heirdsfield e Cooper (2004) (citados em Proulx, 2013), o próprio problema e a forma como este é apresentado são também fatores essenciais na elaboração da estratégia. O problema de otimização proposto na tarefa "A População da Urbanização" é um exemplo claro desses aspetos, uma vez que os alunos, pela sua estrutura mais aberta, não o reconheceram como um problema em que poderiam utilizar a relação entre o sinal da função derivada e o sentido de variação e extremos da função original para o resolver. Na resolução deste problema ficou bastante evidente a importância do controlo na atividade de resolução de problemas, tal como é defendido fortemente por Schoenfeld (1992). Assim, embora os alunos possuíssem os conhecimentos necessários para resolver o problema, não reconheceram como os poderiam utilizar, o que levou a resoluções incorretas.

Desde o primeiro problema, à exceção de uma aluna, todos os que recorreram à relação entre o sinal da função derivada, sentido de variação e extremos da função original, optaram por visualizar o sinal da derivada através da calculadora gráfica. Aliás, a aluna que inicialmente fazia esboços da função sem recorrer à calculadora gráfica, nos últimos problemas acabou por recorrer a esta ferramenta, tal como os outros colegas, reconhecendo a utilidade da mesma. Uma vez que para estudar o sinal da função derivada os alunos sentiram necessidade de a representar graficamente, posso, tal como Consciência (2013), assumir que estes recorrem à calculadora gráfica quando precisam de representar uma função que está definida por uma expressão algébrica.

Apesar de utilizarem a calculadora gráfica na resolução de todos os problemas, pude verificar que os alunos utilizam esta ferramenta como um auxílio, isto é, para cálculos aritméticos, para confirmar o resultado de resoluções analíticas e para representarem graficamente funções mas, a menos que se lhes seja pedido expressamente para utilizarem a calculadora, dão preferência às resoluções analíticas. Estes dados vão ao encontro de estudos realizados por Rocha (2012) e Semião e Canavarro (2012) e reforçam a importância de o professor estimular o contacto dos alunos com funcionalidades da calculadora gráfica que não apenas o cálculo aritmético e a visualização.

Tal como indica Threfall (2002), embora as estratégias emerjam no contacto com os problemas, a experiência é um fator que não pode ser desconsiderado. Neste sentido, e tendo em conta as orientações do Programa de Matemática A do Ensino Secundário e do NCTM (2008), as discussões coletivas onde foram abordadas as várias estratégias e a eficácia das mesmas, contribuíram para que alguns alunos pudessem conhecer novas estratégias e melhorar as suas resoluções (ME, 2001).

Que conhecimentos sobre a derivada de uma função evidenciam os alunos ao resolverem este tipo de problemas?

Analisando as resoluções dos alunos, a conclusão imediata que posso fazer é o facto de estes terem realizado aprendizagens significativas no que se refere às regras de derivação. Em nenhum dos problemas se registou qualquer erro na aplicação das mesmas, o que vai ao encontro de vários estudos, por exemplo Orton (1983) e Gil (2014), onde os alunos mostraram facilidade em recorrer às regras de derivação.

Na maioria dos problemas, os alunos aplicaram os seus conhecimentos acerca da derivada de uma função recorrendo à relação entre o sinal da função derivada, sentido de variação e extremos da função original. De uma forma geral, os alunos não evidenciaram muitas dificuldades, reconhecendo o processo que permite estudar o sentido de variação de uma função através do sinal da função derivada. Mais uma vez estes dados estão em concordância com o estudo realizado por Gil (2014) e, tal como a autora, reconheço que os alunos se centraram mais na aplicação de regras e procedimentos do que no significado da relação. Aliás, analisando as resoluções de alguns alunos é percetível que estes encaram esta relação apenas como um procedimento, aplicando-a, tal como referido por Selden, Mason, e Selden (1989) e Selden, Selden, & Mason (1994) (citados em Swanagan, 2012), sem saberem realmente por que motivo funciona.

Possivelmente pelo facto de não perceberem por que motivo a relação entre o sinal da função derivada, sentido de variação e extremos da função original permite, caso existam, identificar os extremos relativos de uma função e resolver este tipo de problemas, alguns alunos assumiram de imediato os zeros da função derivada como extremos da função original, não reconhecendo a importância do estudo do sinal da derivada e do sentido de variação da função original. Embora no caso de alguns alunos esta tenha sido uma situação esporádica, verifiquei que um aluno assumiu sempre os zeros da derivada como extremos da função original, nunca construindo o quadro de sinal da derivada. Ao introduzir esta relação debati com a turma alguns exemplos de funções que, embora tivessem zeros, não mudavam de sinal e portanto os zeros não correspondiam aos extremos da função original. Além disso, ao longo das discussões coletivas no âmbito do estudo enfatizei várias vezes a necessidade de se ter em conta estes casos "especiais". No entanto, para este aluno, tal pareceu não fazer sentido uma vez que após determinar os zeros da derivada o aluno substituía esses valores na função original para determinar qual o maximizante e/ou o minimizante, nunca estudando o sinal da derivada e consequentemente o sentido de variação da função original. Uma vez que este aluno é dos mais interessados e com menos dificuldades na disciplina, penso que posso afirmar que este não realizou aprendizagens significativas no âmbito da relação entre o sinal da função derivada, sentido de variação e extremos da função original.

Ao analisar o problema da tarefa "A População da Urbanização" pude perceber que alguns alunos não compreenderam o significado de taxa de variação (derivada). Embora reconheça que os alunos conseguem aplicar as regras de derivação sem qualquer dificuldade e até calcular a taxa de variação num determinado instante por definição, parece-me que muitos ainda não compreendem o significado do conceito. Este facto leva-me a acreditar que os alunos desenvolveram um *conceito imagem* do conceito de derivada essencialmente associado a uma função obtida a partir da função original que permite analisá-la e resolver alguns problemas. Esta conclusão é semelhante à de Gil (2014) e reforça a ideia referida por Orhun (2012) de que para os estudantes o conceito de derivada remete apenas para as operações com derivadas.

No problema referido acima, verifiquei ainda que os dois alunos que optaram por uma abordagem gráfica representaram graficamente a função derivada aparentemente sem reconhecerem esse facto e não fizeram qualquer interpretação do gráfico em questão. Esta situação vai ao encontro dos resultados do estudo de Orhun (2012), onde o autor concluiu que, embora os alunos compreendam a noção de derivada algebricamente, têm dificuldades em interpretar o gráfico da função derivada.

Esta dificuldade na abordagem gráfica, relativa não apenas à função derivada mas às funções em geral, ficou ainda mais evidente ao longo da resolução dos vários problemas. Assim, tal como já referi acima, todos os alunos estudaram o sinal da função derivada através da calculadora gráfica, não se arriscando, na maioria, a esboçar a função sem este recurso. Apesar de evidenciar as dificuldades dos alunos, este facto reforça o papel da visualização no contexto das derivadas, tal como é referido por vários autores, por exemplo Tall (1989) e mais do que isso, enfatiza a importância que a tecnologia (neste caso a calculadora gráfica) tem neste sentido. Indo ao encontro das ideias de Dubinsky e Tall (1991) entre outros, pude constatar que o recurso à tecnologia foi essencial nas primeiras aulas para introduzir conceitos como taxa média de variação e taxa de variação/derivada e respetivas interpretações geométricas, tornando os conceitos menos “abstratos” para os alunos. No entanto, não posso deixar de referir que, mesmo em situações aparentemente mais fáceis como a que relatei (esboçar o gráfico de uma função), a tecnologia se revela uma ferramenta essencial. Embora considere que os alunos devem saber representar funções sem recorrer à calculadora gráfica, remetendo para o estudo que realizo, esta ferramenta mostrou-se extremamente facilitadora e, mais do que isso, permitiu aos alunos com mais dificuldades avançar nas suas resoluções e terminar os problemas.

Que dificuldades manifestam no processo de resolução de problemas de otimização?

Na resolução dos problemas de otimização as principais dificuldades que os alunos manifestaram relacionam-se com o contexto dos mesmos. Nos problemas iniciais pude verificar que, tanto nos procedimentos como na resposta final, os alunos mostraram desconsiderar a importância de resolver e responder ao problema de acordo com o contexto apresentado.

Embora fosse de esperar, tendo em conta o contexto da maioria dos problemas apresentados, que os alunos considerassem apenas as respetivas funções para domínios com valores não negativos, tal não se verificou, principalmente nos problemas iniciais. Assim, no primeiro problema ficou bastante claro que os alunos não respeitaram o contexto uma vez que calcularam, por exemplo, um perímetro de um retângulo cujo comprimento de um dos lados é -8, isto porque os zeros da função derivada que obtiveram eram 8 e -8. Este facto vai ao encontro do estudo realizado por Nabais (2010) onde a autora refere que alguns alunos revelam ausência de capacidade de interpretar e criticar as soluções de uma equação quadrática, em problemas contextualizados. Tal como a autora, pude concluir que os alunos evidenciaram melhorias quanto a esse aspeto, ao longo do estudo, e que no final, a maioria, já eliminava as raízes negativas, justificando, inclusive, porque é que estas não faziam sentido no contexto do problema.

Ainda relativamente às funções quadráticas, os alunos revelaram algumas dificuldades no cálculo dos zeros. Deste modo, quando confrontados com coeficientes decimais os alunos, ao aplicarem a fórmula resolvente enganaram-se frequentemente nos cálculos. De referir, no entanto, que a equação em que se verificaram mais erros era incompleta pelo que os alunos poderiam ter usado a lei do anulamento do produto. Esta aplicação "desnecessária" da fórmula resolvente corrobora mais uma vez os resultados do estudo de Nabais (2010) que constatou que vários alunos preferem usar esta "receita" do que apelar às suas capacidades para decidir o processo a utilizar em cada caso.

Durante a resolução dos problemas pude também observar que os alunos cometem alguns erros ao nível da simbologia matemática utilizada. Assim, em mais do que um problema os alunos indicaram as funções através de uma letra diferente da expressa no enunciado e, muitas vezes, utilizaram indiscriminadamente a variável x, mesmo quando as funções estavam definidas em função de, por exemplo, t. No entanto, ao longo das aulas referentes à recolha de dados, os alunos foram tomando mais atenção a estas questões sendo que, no último problema, a maioria dos alunos usou as designações corretas para as funções e as variáveis em causa.

Nos dois problemas que envolviam funções racionais os alunos demonstraram bastantes dificuldades na resolução de equações. No primeiro problema houve uma grande parte da turma que não considerou o domínio da função, resolvendo equações como se o denominador fosse uma constante, o que revela conhecimentos pouco sólidos no âmbito da validade do domínio de uma função racional. Embora no último problema tenha verificado que ainda existiam alunos com dificuldades a este nível, após as discussões coletivas houve uma evolução muitíssimo positiva, o que reforça, à semelhança do que é referido por Consciência (2013), a importância do professor enfatizar bastante as particularidades do domínio de uma função racional.

Esta evolução no que respeita à determinação do domínio de funções racionais verificou-se também na construção do quadro de sinal da derivada. No primeiro problema, mesmo entre os alunos que determinaram o domínio da função, poucos incluíram a restrição no quadro de sinal. No entanto, no último problema a maioria dos alunos construiu o quadro incluindo a restrição ou considerando apenas valores não negativos. O facto de, nos problemas finais, muitos alunos terem construído os quadros de sinal da derivada apenas para valores maiores que zero, demonstra que estes, ao longo da resolução dos vários problemas, foram prestando cada vez mais atenção ao contexto e permite-me conjeturar que assimilaram, através das discussões coletivas, a importância de, mesmo nos procedimentos matemáticos, ter em conta a situação apresentada.

No problema em que os alunos tiveram de recorrer exclusivamente à calculadora gráfica pude verificar, indo ao encontro do que já referi acima, que os seus conhecimentos sobre a utilização do recurso estão associados principalmente ao cálculo aritmético e à visualização de gráficos. Assim, os alunos mostraram-se reticentes em resolver um problema de otimização por métodos não analíticos, revelando o desconhecimento de certas funcionalidades da calculadora. A principal dificuldade registada prende-se com o ajustamento da janela, o que vai ao encontro de estudos realizados por Berry e Graham (2005). Deste modo, alguns alunos não sabiam que comandos utilizar para ajustar a janela e, além disso, muitos não sabiam que valores seriam adequados para obter uma visualização apropriada da representação gráfica da função.

Os alunos revelaram também algumas dificuldades no que se refere a problemas não equacionados. Tal como é referido por vários autores, nomeadamente Kieran (2007), a passagem da linguagem natural para a algébrica é bastante difícil para a maioria dos alunos, o que também se verificou com esta turma. No entanto, não posso deixar de referir que todos os alunos, com mais ou menos esforço, acabaram por equacionar autonomamente a situação apresentada.

No que se refere às respostas dadas aos problemas, inicialmente os alunos demonstraram desconsiderar a importância da resposta a um problema, sendo que, muitos deles não responderam de todo. Os que responderam fizeram-no de uma forma muito sucinta e que por vezes não dava resposta à questão do enunciado. Foi visível que, nos problemas iniciais, muitos alunos não se preocuparam em avaliar se a solução encontrada era ou não adequada ao problema, tal como foi verificado por Gil (2014), para alunos do mesmo nível de escolaridade.

Além da dificuldade em responder adequadamente aos problemas, os alunos mostraram não reconhecer a aplicabilidade da Matemática, assumindo que o mais importante é aplicar os procedimentos corretamente. Aliás, na resolução do problema apresentado na tarefa "A População da Urbanização" foi fácil perceber que os alunos não estabelecem conexões entre a Matemática e outras ciências. Apesar de ter sido pedido um estudo demográfico, com o qual os alunos contactaram várias vezes na disciplina de Geografia, estes mostraram-se pouco preocupados em responder de forma que o leitor ficasse com uma ideia da evolução da população, focando-se apenas nos procedimentos matemáticos.

Embora nos problemas finais os alunos ainda respondessem de forma sucinta, verificou-se uma grande evolução. Assim, a maioria dos alunos respondeu adequadamente aos últimos problemas indo ao encontro da questão do enunciado e demonstrando uma maior preocupação com esta fase da resolução de problemas. Apesar de a evolução ter sido geral na turma, pude também verificar que os alunos que têm mais facilidade na disciplina foram os que mais se preocuparam em responder adequadamente e em verificar se as suas respostas faziam sentido no contexto do problema. Conclusões semelhantes foram relatadas por Swanagan (2012), o que reforça a ideia de que é extremamente importante estimular todos os alunos, principalmente os que têm mais dificuldades ou menos interesse na disciplina, para a relevância das respostas no âmbito da resolução de problemas.

Como se pode perceber algumas das dificuldades iniciais foram ultrapassadas e, para esta evolução positiva na forma como os alunos resolvem problemas de otimização, não posso deixar de referir a importância das discussões coletivas que permitiram estimular o espírito crítico dos alunos e consciencializá-los para a necessidade de responderem aos problemas que lhes são apresentados. No final da unidade de ensino, penso que a maioria dos alunos abordava os problemas de uma forma diferente, com muito mais atenção e preocupação tanto com os procedimentos como com o contexto, o que valoriza a importância da experiência na resolução de problemas, indo ao encontro do que é referido por vários autores, nomeadamente Carlson e Bloom (2005).

6.3. Reflexão final

Desde que me recordo sempre quis ser professora. As disciplinas que sonhava lecionar foram variando ao longo dos anos mas desde que ingressei no 3.º Ciclo a paixão pela Matemática foi-se tornando cada vez mais forte e percebi que o meu futuro profissional teria que estar relacionado com esta ciência. O percurso não foi fácil e até chegar ao Mestrado questionei-me muitas vezes sobre se optar pelo ensino seria a decisão mais acertada. No entanto, acredito que não podemos passar pela vida sem tentar concretizar os nossos sonhos e foi isso que fiz ao inscrever-me no Mestrado em Ensino de Matemática, há cerca de dois anos.

O primeiro ano foi uma nova descoberta, uma realidade completamente diferente da que estava habituada, com novas aprendizagens, novos métodos e dinâmicas de trabalho e uma perspetiva de ensino que me fez alargar horizontes. Enquanto aluna, até ao Ensino Secundário senti-me sempre bastante satisfeita com o meu papel na escola e com o ensino expositivo que os professores praticavam, parecendo-me ser esta a única forma de ensinar e aprender. No entanto, tal como um professor do Mestrado disse um dia "aqueles que querem ser professores são os que gostaram da escola e que eram bons alunos, não aqueles com dificuldades e com dúvidas sobre o papel da escola na sua formação". E a verdade é que realmente nunca me tinha conseguido pôr no lugar de um aluno que não se sente profundamente entusiasmado com novas aprendizagens, mesmo que estas se resumam a ouvir o professor e em seguida resolver uma lista infindável de exercícios. O primeiro ano de Mestrado deu-me essa oportunidade e penso que será sempre, ao longo de toda a minha vida, uma das aprendizagens mais fortes de todo este processo. O facto de conhecer novas formas de ensinar, como o ensino exploratório, em que os alunos podem realmente sentir que fazem parte de algo, que são intervenientes ativos nas suas aprendizagens, mudou totalmente a minha visão do ensino em geral, mas principalmente do ensino da Matemática.

Todas estas novas perspetivas do ensino tornaram o primeiro ano aliciante e muitíssimo enriquecedor mas a ideia de que no ano seguinte iria finalmente para uma escola "dar aulas" tornava-se cada vez mais real. Por um lado, parecia que o tempo não passava na ânsia de finalmente realizar o meu sonho mas ao mesmo tempo estava a passar tão depressa que parecia não haver tempo suficiente para absorver todos os conhecimentos e sentir-me preparada para encarar uma turma.

Na incerteza da escola, do ano de escolaridade, dos orientadores, entre outros, depressa chegou o primeiro dia de aulas do ano letivo e não podia estar mais nervosa. Será que os alunos iam reagir bem à minha presença? Eu era uma estranha, eles nunca tinham tido um "estagiário efetivo" e já estavam habituados à minha orientadora cooperante desde o ano letivo anterior. Será que eu iria reagir bem? Estaria à altura do desafio? E mais, será que eu iria gostar? Sempre havia sonhado ser professora mas, fora os trabalhos de campo do primeiro ano, a minha experiência de ensino era nula. Todas estas dúvidas se dissiparam na primeira aula uma vez que a receção foi a melhor possível e os alunos de imediato se mostraram recetivos à minha presença, colocando-me dúvidas desde a primeira tarefa. Aliás, a relação que desenvolvi com a turma ao longo do ano foi das melhores coisas que aconteceu na vida e posso dizer que me senti muito afortunada por encontrar alunos como eles. Apesar de conversadores e com algumas dificuldades na disciplina de Matemática A, os alunos mostraram-se sempre empenhados e participativos. Mais do que isso, apesar de tão jovens mostram-se já seres humanos atenciosos e compreensivos e ao perceberem o quanto esta experiência e, em particular, as aulas assistidas eram importantes para mim, procuram sempre dar o seu melhor nas aulas que lecionei. Durante a minha intervenção, tanto no primeiro como no segundo período, sempre me respeitaram, encarando-me como professora e, no final de cada aula, existiam sempre alunos que me perguntavam como tinha corrido, como se tinham comportado, se havia alguma coisa que deviam mudar e encorajando-me constantemente para as aulas seguintes.

Se a dimensão afetiva do papel do professor superou todas as minhas expetativas, as aulas que lecionei nem sempre corresponderam aos meus objetivos. Assim, a minha desorganização, que sempre encarei como natural, juntamente com o meu perfecionismo tornaram-se bastante condicionantes. Uma vez que ser professora sempre foi o meu objetivo de vida, o meu maior desejo nas aulas assistidas era poder mostrar o meu valor mas, como é obvio, sendo totalmente inexperiente e estando em processo de formação as aulas não poderiam ser perfeitas, muito pelo contrário. O processo nem sempre foi fácil e muitas vezes tive de lidar com a minha própria frustração. As maiores dificuldades que senti foram conseguir chegar individualmente aos alunos e ao mesmo tempo controlar as intervenções no quadro e o barulho em sala de aula. Dado que a turma era bastante numerosa e pouco autónoma, nas primeiras aulas que lecionei parecia-me quase impossível controlar todas as variáveis. No entanto, penso que no final, apesar de algumas falhas, já conseguia gerir as aulas de forma produtiva. A evolução que senti ao longo de toda a intervenção foi, sem dúvida, um dos fatores mais positivos nesta caminhada. Apesar de nunca ter conseguido uma aula perfeita, se é que tal existe, sinto que em todas as aulas melhorei um pouco e mesmo quando isso não foi, por vezes, visível, sentia-me cada vez mais confiante e em controlo da situação. O facto de, no final de cada aula, ser confrontada com as minhas falhas nas conversas com as orientadoras, ensinou-me muito sobre ser professora mas, acima de tudo, ensinou-me muito sobre mim enquanto ser humano. Percebi quais são as minhas qualidades, aprendi a reconhecer o que tenho de melhorar, a aceitar críticas e todos os dias procuro ser melhor.

Além das aprendizagens decorrentes da minha prestação nas aulas serem essenciais para a minha formação enquanto professora e ser humano também o trabalho de grupo foi importantíssimo. Até entrar no Mestrado era bastante reticente a essa prática, preferindo trabalhar sozinha, não dependendo de ninguém. Obviamente, desde o início tive de mudar a minha postura o que foi muitíssimo positivo. A partilha de ideias torna os trabalhos mais desafiantes e enriquece-os imenso. Como pessoa, aprendi a ser mais tolerante, a aceitar outras opiniões e a perceber que nem sempre estou correta. Posso dizer que percebi finalmente a importância de trabalhar em grupo e penso que os professores só teriam a ganhar se recorressem mais ao trabalho colaborativo.

O facto de preparar grande parte da unidade de ensino com a minha colega de estágio foi também uma mais-valia pois o trabalho prévio de planificações, elaboração e seleção de tarefas é bastante complexo. Esta fase de preparação foi muitíssimo importante e, em particular, a construção das tarefas permitiu-me aprender muito mais sobre o tema a lecionar e sobre a forma como este pode ser abordado com os alunos. As planificações foram também essenciais pois permitiram-me antever cada momento da aula e prepará-lo ao pormenor. Claro que as aulas nem sempre cumpriram as planificações, mas ter essa segurança contribuiu muito para o bom funcionamento das mesmas. Pelo lado negativo, por vezes saber que a planificação não estava a ser cumprida contribuía para o nervosismo mas depressa percebi que, embora devamos sempre procurar respeitar os tempos estabelecidos, o mais importante é que os alunos realizem aprendizagens significativas.

Tendo em conta as aprendizagens ao longo do Mestrado, uma das preocupações na elaboração das tarefas foi a inclusão das tecnologias. Se há dois anos, confesso, me questionaria seriamente sobre a utilidade de introduzir um computador na aula de Matemática, percebo agora como as ferramentas tecnológicas podem ser essenciais nas aprendizagens. As duas primeiras aulas da unidade, recorrendo ao GeoGebra, funcionaram muitíssimo bem e acredito que influenciaram de uma forma extremamente positiva a compreensão de conceitos como taxa média de variação e taxa de variação. Apesar de perceber que pode ser intimidador para um professor, principalmente inexperiente, preparar aulas com este tipo de dinâmica, os benefícios para as aprendizagens dos alunos são tão fortes que eu, algo descrente, me tornei uma adepta das tecnologias em sala de aula, desde que obviamente adequadas e com uma preparação especialmente cuidada. Além disso, percebi que mesmo um tema delicado como o que lecionei pode ser tratado de uma forma apelativa e penso que, apesar de os alunos terem revelado algumas dificuldades, a evolução positiva que se registou ao longo da unidade de ensino, deveu-se, em muito, à forma como as aulas foram preparadas e às tarefas propostas.

Ao escrever esta reflexão percebo também as aprendizagens que realizei ao longo da elaboração do relatório escrito. Se muitas vezes pensamos, enquanto alunos deste Mestrado, que não há tempo para refletir entre as aulas, o que por vezes é verdade, os meses de escrita permitiram-me, não intencionalmente, refletir sobre estes dois anos tão enriquecedores, especialmente o último. A pesquisa realizada trouxe-me tantos novos conhecimentos sobre a Matemática em geral e sobre o tema das derivadas em particular, que acredito hoje saber muito mais do que quando comecei a preparar as aulas. No entanto, não é o "conhecer mais" que me deixa tão satisfeita mas o conhecer mais de uma forma diferente, ligado às aprendizagens dos alunos e à transmissão desse conhecimento. Ao desenvolver o capítulo da unidade de ensino, pude então refletir, com o respetivo distanciamento, sobre as aulas que lecionei e observar a unidade como um todo, percebendo a complexidade e riqueza das aprendizagens que vivi ao longo de todo o Mestrado e que culminaram num intenso mês de aulas, onde tive finalmente a oportunidade de pôr em prática tudo o que aprendi.

Em jeito de conclusão, percebo o quanto cresci nos últimos dois anos, o quanto mudei a minha perspetiva sobre o ensino mas acima de tudo o quanto me apaixonei ainda mais por esta que penso ter sido, desde sempre, a minha vocação. Sempre acreditei que devido à minha força vontade e amor pelo ensino poderia ser uma boa professora, agora sei que tenho as ferramentas necessárias para o fazer e espero, no futuro, estar a altura dos desafios e poder ensinar da forma como me ensinaram no Mestrado.

Referências

Abrantes, P., Serrazina, L. & Oliveira, I. (1999). *A Matemática na educação básica*. Lisboa: ME-DEB.

Abrantes, P. (1985). Planificação no ensino da Matemática. Texto de apoio à disciplina de Metodologia da Matemática (documento não publicado). Acedido em https://plataforma.elearning.ulisboa.pt/course/category.php?id=1658

Agrupamento de Escolas de Caneças (2009). *Projeto Educativo 2009/2013*. (documento não publicado).

Almeida, C., & Viseu, F. (2002). Interpretação gráfica das derivadas de uma função por professores estagiários de Matemática. *Revista Portuguesa de Educação, 15(1),* 193-219.

Amado, N., & Carreira, S. (2008). Utilização Pedagógica do computador por professores estagiários de Matemática – diferenças na prática da sala de aula. In A.P. Canavarro, D. Moreira & M. I. Rocha (Orgs.), *Tecnologias e Educação Matemática* (pp. 286-299). Porto: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

APM (1990). *Renovação do currículo de Matemática*. Lisboa: APM.

Aspinwall, L., Shaw, K., & Presmeg, N. (1997). Uncontrollable mental imagery: graphical connections between a function and its derivative. *Educational Studies in Mathematics*, *33*, 301-317.

Berry, J., & Graham, T. (2005). On high-school students' use of graphic calculators in mathematics. *ZDM The International Journal on Mathematics Education, 37 (3)*, 140-148

Boavida, A. M., Paiva, A. L., Cebola, G., Vale, I., & Pimentel, T. (2008). *A Experiência Matemática no Ensino Básico*. Lisboa: ME.

Bogdan, R., & Biklen, S. K. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos.* Porto: Porto Editora.

Canavarro, A. P., Oliveira, H., & Menezes, L. (2012). Práticas de Ensino Exploratório da Matemática: o caso da Célia. In L. Santos (Ed.), *Investigação em Educação Matemática: Práticas de ensino da Matemática* (pp.255-265). Portalegre: SPIEM.

Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Educação e Matemática, 115*, 11-17.

Candeias, A. (2010). *Aprendizagem das funções no 8.º ano com o auxílio do software GeoGebra* (Dissertação de Mestrado). Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Lisboa.

Carlson, M.P., & Bloom, I. (2005). The cyclic nature of problem solving: an emergent multidimensional problem-solving framework. *Education Studies in Mathematics, 58,* 45-75.

Consciência, M. (2013). *A calculadora gráfica na aprendizagem das funções no ensino secundário* (Tese de Doutoramento). Universidade de Lisboa, Lisboa.

Consciência, M., & Oliveira, H. (2011). Conexões entre representações, em funções não familiares, mediadas pela calculadora gráfica: o caso do Diogo. In *Atas do XXI SIEM*. Lisboa: APM.

Consciência, M. (2003). Calculadoras Gráficas: Algumas limitações. *Gazeta da Matemática*, *145*, 34-42.

Cornu, B. (1991). Advanced Mathematical Thinking and the Computer. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 153-166). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Coutinho, C. (2013). *Metodologia de investigação em Ciências Sociais e Humanas: Teoria e Prática*. Coimbra: Edições Almedina.

D'Ambrosio, B.S. (2003). Teaching Mathematics through Problem Solving: A historical Perspective. In H. L. Schoen & R. I. Charles (Eds.), *Teaching Mathematics through Problem Solving* (pp.39-52). Reston, VA: NCTM.

Dias, S., & Santos, L. (2009). Avaliação reguladora, *feedback* escrito, conceitos matemáticos: um Triangulo de difícil construção. In *Atas do XX SIEM.* Viana do Castelo: APM.

Doerr, H. M., & Zangor, R. (2000). Creating meaning for and with the graphing calculator. *Educational Studies in Mathematics*, *41 (2)*, 143-163.

Domingos, A.M.D. (2003). *Compreensão de conceitos matemáticos avançados – a matemática no inicio do superior* (Tese de Doutoramento). Universidade Nova de Lisboa, Lisboa.

Dubinsky, E., & Tall, D. (1991). Advanced Mathematical Thinking and the Computer. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 231-248). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Escolas Secundária com 3.º Ciclo de Caneças (2010). *Projeto Educativo 2010-2013*. (documento não publicado).

Fernandes, D. (2011). Articulação da aprendizagem, da avaliação e do ensino: Questões teóricas, práticas e metodológicas. In M.P. Alves & J. M. De Ketele (Orgs.), *Do currículo à avaliação, da avaliação ao currículo* (pp. 131-142). Porto: Porto Editora.

Gil, R. (2014). *A aprendizagem da noção de derivada no 11.º ano* (Relatório da Prática de Ensino Supervisionada). Universidade de Lisboa, Lisboa.

Giraldo, V., Carvalho, L. M., & Tall, D. (2003). Descriptions and Definitions in the Teaching of Elementary Calculus. In N.A. Pateman, B.J. Dougherty & J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the PME,* vol. 2 (pp.445-452). Honolulu, USA.

Grouws, D. A. (2003). The Teacher's Role in Teaching Mathematics through Problem Solving. In H. L. Schoen & R. I. Charles (Eds.), *Teaching Mathematics through Problem Solving* (pp.129-141). Reston, VA: NCTM.

Haciomeroglu, E.S., Aspinwall, L., & Presmeg, N.C. (2010). Contrasting Cases of Calculus Students' Understanding of Derivative Graphs. *Mathematical Thinking and Learning, 12(2)*, 152-176.

Hiebert, J., & Wearne, D. (2003). Developing Understanding through Problem Solving.In H. L. Schoen & R. I. Charles (Eds.), *Teaching Mathematics through Problem Solving* (pp.93-104). Reston, VA: NCTM.

Huntley, M. A., Marcus, R., Kahan, J., & Miller, J. L. (2007). Investigating high-school students' reasoning strategies when they solve linear equations. *Journal of Mathematical Behavior, 26*, 115-139.

Inspeção-Geral da Educação e da Ciência (2013). *Avaliação externa das escolas: Relatório da Escola Secundária de Caneças*. Lisboa: Ministério da Educação.

Jorgensen, D. L. (1989). *Participant observation*. Newbury Park: Sage.

Kahan, J. A., & Wyberg, T. R. (2003). Mathematics as Sense Making. In H. L. Schoen & R. I. Charles (Eds.), *Teaching Mathematics through Problem Solving* (pp.15-25). Reston, VA: NCTM.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at middle school through college levels. In F. K. Lester, Jr. (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp.707-762). Reston, VA: NCTM.

Lester, F. (1978). Mathematical problem solving in the elementary school: Some educational and psychological considerations. In L.L. Hatfield & D.A. Bradbard (Eds.), *Mathematical problem solving: papers from a research workshop* (p.53-87). Columbus, OH: ERIC/SMEAC.

Lester Jr., F. K. (1985). Methodological Considerations in Research on Mathematical Problem-Solving Instruction. In E. A. Silver (Ed.), *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives* (pp. 41-69). New Hillsdale, NJ: Lawrence Eribaum Associates.

Malaspina, U., & Font, V. (2010). The role of intuition in the solving of optimization problems. *Educational Studies in Mathematics, 75*, 107-130.

Markus, H. (2006). *The role of representations in learning the derivative* (Tese de Doutoramento). University of Jyväskylä, Finland.

Mayer, R. E. (1985). Implications of Cognitive Psychology for Instrution in Mathematical Problem Solving. In E. A. Silver (Ed.), *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives* (pp. 123-137). New Hillsdale, NJ: Lawrence Eribaum Associates.

ME (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: DGIDC.

ME (2002). *Programa de Matemática A, Ensino Secundário, 11º ano*. Lisboa: DGIDC.

ME (2001). *Programa de Matemática A, Ensino Secundário, 10º ano*. Lisboa: DGIDC.

ME (1997). *Matemática – programas do 10º, 11º e 12º anos*. Lisboa: DES.

Mestre, C., & Oliveira, H. (2012). A co-construção da generalização nas discussões coletivas : Um estudo com uma turma do 4.º ano. *Quadrante, 21(2)*, 111-137.

Moyer, J., Cai, J., Laughlin, C., & Wang, N. (2009). The effect of curriculum type on middle grades instruction. In S. L. Swars, D. W. Stinson & S. Lemons-Smith (Eds.), *Proceedings of the 31st Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the PME* (Vol. 5, pp. 201-209). Atlanta, GA: Georgia State University.

Musser, G. L., & Shaughnessy, J. M. (1980). Problem-solving Strategies in School Mathematics. In S. Krulik & R. Reys (Eds.), *Problem solving in school mathematics* (pp. 136-145). Reston, VA: NCTM.

Nabais, M. (2010). *Equações de 2.º grau: um estudo sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos do 9.º ano* (Dissertação de Mestrado). Universidade de Lisboa, Lisboa.

NCTM (2008). *Princípios e Normas para a matemática Escolar*. Lisboa: APM. (original em inglês, publicado em 2000).

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: NCTM.

NCTM (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em Matemática escolar*. Lisboa: APM e IIE. (original em inglês, publicado em 1989).

NCTM (1980). *An agenda for action: Recommendations for school mathematics for the 1980s.* Reston, VA: NCTM.

Oliveira, H., Menezes, L., & Canavarro, A. P. (2013). Conceptualizando o ensino exploratório da Matemática: Contributos da prática de uma professora do 3.º ciclo para a elaboração de um quadro de referência. *Quadrante, 22(2)*, 29-53.

Orhun, N. (2012). Graphical understanding in mathematics education: derivative functions and student's difficulties. *Procedia – Social and Behavioral Sciences, 55*, 679 – 684.

Orton, A. (1983). Students' understanding of differentiation. *Educational Studies in Mathematics*, *14(3)*, 235-250.

Pinto, M., Viseu, F., Cunha, M., & Martins, P. (2014). A resolução de problemas na aprendizagem de derivada de uma função de alunos de 11.º ano de escolaridade. In Atas *do ProfMat*. Braga: APM

Pólya, G. (1980). On solving mathematical problems in high school. In S. Krulik & R. Reys (Eds.), *Problem solving in school mathematics* (pp. 1-2). Reston, VA: NCTM.

Pólya, G. (1967). Do original francês 'L'enseigment par les problèmes', publicado na revista *L'Enseigment Mathématique, vol.12*, 233-241 (1967). Tradução de Paulo Alvega, aguarda publicação na revista *Educação e Matemática*. Acedido em https://plataforma.elearning.ulisboa.pt/course/category.php?id=1658

Pólya, G. (1957/2004). *How to Solve It: a new aspect of mathematical method*. Princeton and Oxford: Princeton University Press.

Ponte, J. P., & Quaresma, M. (2012). O papel do contexto nas tarefas matemáticas. *Interacções, 22*, 196-216.

Ponte, J. P. (2010). Explorar e investigar em Matemática: Uma actividade fundamental no ensino e na aprendizagem. *Unión – Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 21*, 13-30.

Ponte, J. P., & Sousa, H. (2010). Uma oportunidade de mudança na Matemática do ensino básico. In GTI (Org.), *O professor e o programa de Matemática do ensino básico* (pp. 11-41). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2000). Tecnologias de informação e comunicação na formação de professores: que desafios? *Revista Ibero Americana de Educação, 24*, 63-90.

Ponte, J.P., & Serrazina, M. L. (2000). *Didáctica da Matemática do 1.º Ciclo*. Lisboa: Universidade Aberta.

Ponte, J. P. (1992). The history of the concept of function and some educational implications. *The Mathematics Educator, 3(2)*, 3-8.

Proulx, J. (2013). Mental mathematics, emergence of strategies, and the enactivist theory of cognition. *Education Studies in Mathematics, 84*, 309-328.

Rocha, H. (2012). *A integração da calculadora gráfica no ensino da Matemática: Estudo sobre as práticas curriculares de professores do ensino secundário* (Tese de Doutoramento). Universidade de Lisboa, Lisboa.

Roorda, G., Vos, P., & Drijvers, P. (2014). Graphing calculator supported instrumentation schemes for the concept of derivative: A case of study. In C. Nicol, S. Oesterle, P. Liljedahl & D. Allan (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36* (Vol. 5, pp. 57-64). Vancouver: PME.

Rothlauf, F. (2011). *Design of Modern Heuristics: Principles and Application*. Berlin: Springer.

Ruhven, K., Deaney, R., & Hennessy, S. (2009). Using graphing software to teach about algebraic forms: A study of technology-supported practice in secondary-school mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 71*, 279-297.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition and sense-making in mathematics. In D.A. Grouws (Ed.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334-370). New York, NY: Macmillan.

Schoenfeld, A.H. (1989). Explorations of students' mathematical beliefs and behavior. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*, 338–355.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem-Solving.* San-Diego, CA: Academic Press.

Schwarzenberger, R. L. E., & Tall, D. (1976). Conflicts in the learning of real numbers and limits. *Mathematics Teaching, 82*, 44–49.

Semião, M. J., & Canavarro, A. (2012). A Utilização da Calculadora Gráfica na Aula de Matemática: Um estudo com alunos do 12.º Ano no Âmbito das Funções. In O. Magalhães, & A. Folque (Orgs.), *Práticas de investigação em Educação* (pp.174-186). Évora: Departamento de Pedagogia e Educação.

Shaughnessy, J.M. (1985). Problem-Solving Derailers: The Influence of Misconceptions on Problem-Solving Performance In E. A. Silver (Ed.), *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives* (pp. 399-415). New Hillsdale, NJ: Lawrence Eribaum Associates.

Silva, F. (2012). *Pensamento Algébrico: o sentido de símbolo e de variavél em alunos do 8.º ano de escolaridade* (Relatório da Prática de Ensino Supervisionada). Universidade de Lisboa, Lisboa.

Silva, J. S., & Paulo, J. D. S. (1968). *Compêndio de Álgebra*: 1º tomo – 6º ano. Braga: Livraria Cruz.

Stanic, G., & Kilpatrick, J. (1989). Historical Perspectives on Problem Solving in the Mathematics Curriculum. In R. I. Charles & E. A. Silver (Eds.), *The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving. Research Agenda for Mathematics Education*, vol.3 (pp.1-22). Hillsdale, N.J: Lawrence Erlbaum Associates and Reston, VA: NCTM.

Swanagan, 2012). *The impact of student´s understanding of derivatives on their performance while solving optimization problems* (Tese de Doutoramento). University of Georgia: Georgia

Tall, D. (1994). Calculus and Analysis. In Dina Tirosh (Ed.), Mathematical Topics of Instruction, in T. Husen & T. N. Postlethwaite, (Eds.) *The International Encyclopaedia of Education,* Second Edition, Pergamon Press. pp. 3680-3681, 3686.

Tall, D. (1992). The Transition to Advanced Mathematical Thinking: Functions, Limits, Infinity, and Proof. In Grouws D.A (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp.495-511). New York, NY: Macmillan.

Tall, D. (1989). Concept Images, Generic Organizers, Computers and Curriculum Change. *For the Learning of Mathematics, 9 (3)*, 37-42.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*, 151 – 169.

Teixeira, P., Precatado, A., Albuquerque, C., Antunes, C., & Nápoles, S.M. (1998). *Funções: 11º ano de Escolaridade*. Lisboa: ME – DES.

Teuscher, D., & Reys, R. E. (2010). Slope, rate of change, and steepness: Do students understand these concepts? *Mathematics Teacher*, *103,* 519–524.

Threlfall, J. (2002). Flexible mental calculations. *Educational Studies in Mathematics*, *50(1),* 29–47.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 65-81). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Education in Science and Technology*, *14*, 293-305.

Wallas, G. (1926). *The Art of Thought*. New York, NY: Franklin Watts.

Wilson, J. W., Fernandez, M. L., & Hadaway, N. (1993). Mathematical problem solving. In P. S. Wilson (Ed.), *Research ideas for the classroom: High school mathematics* (pp. 57–78). New York, NY: Macmillan.

Zbiek, R. M. (2003). Using Technology to Foster Mathematical Meaning through Problem Solving. In H. L. Schoen & R. I. Charles (Eds.), *Teaching Mathematics through Problem Solving* (pp.93-104). Reston, VA: NCTM

Legislação consultada

Portugal. DECRETO-LEI 139/2012

Anexos

Anexo 1 – Planificações

Anexo 1.1. Planificação 1.ª aula

Aula de 25 de fevereiro de 2015 – Plano de Aula

Matemática	Introdução ao Cálculo Diferencial I	Ano/Turma: 11º[redacted]

Sumário
Noção de Taxa Média de Variação e interpretação geométrica: tarefa de exploração.

Objetivos
Compreender a noção de Taxa Média de Variação num intervalo, a sua relação com a monotonia da respetiva função no intervalo e a sua interpretação geométrica.

Recursos			
Professor	Manual escolar Tarefa “Estância de Ski” Projetor Computador Portátil	Aluno	Computador portátil Tarefa “Estância de Ski” Guião GeoGebra Manual escolar

Principais Tópicos e conceitos envolvidos	Capacidades Transversais
Noção de taxa média de variação; cálculo de taxa média de variação; interpretação geométrica de taxa média de variação.	Comunicação Matemática Raciocínio Matemático

Metodologia de trabalho
Introdução aos conceitos de variação e taxa média de variação (e respetiva interpretação geométrica) através da resolução da tarefa de exploração “Estância de Ski”, em pares ou grupos de 3 elementos, recorrendo ao *software* de geometria dinâmica GeoGebra. Discussão dos resultados em grande grupo e sistematização dos conceitos envolvidos.

Momentos da aula	Tempo Previsto – Aula 90 minutos
(1) Entrada dos alunos. Ditado do sumário. Registo das faltas.	5min
(2) Apresentação da Tarefa “Estância de Ski”	8min
(3) Resolução da Parte I da Tarefa “Estância de Ski”	25min
(4) Apresentação e discussão dos resultados da Parte I	15min
(5) Sistematização das Aprendizagens	5min
(6) Resolução da Parte II da Tarefa “Estância de Ski”	10min
(7) Apresentação e discussão dos resultados da Parte II	10min
(8) Sistematização das Aprendizagens	10min
(9) Encerramento da aula	2min

Desenvolvimento da Aula
(1) Ditado do sumário e registo das presenças dos alunos.
(2) Apresentação da Tarefa “Estância de Ski” Os alunos serão informados sobre a organização da aula, nomeadamente no que se refere à metodologia de trabalho. A professora indicará a forma como os alunos devem utilizar o *software* de geometria dinâmica GeoGebra e alertará para o facto de, juntamente com a Tarefa “Estância de Ski”, ser entregue um guião para facilitar o trabalho com o *software*. Além da entrega do guião a professora projetará um ficheiro de GeoGebra de modo a indicar aos alunos alguns comandos básicos deste *software*. Neste momento de apresentação, a professora informará também que a tarefa está dividida em duas partes e que só após a resolução e discussão da primeira parte será entregue a segunda. Apesar de a tarefa ser realizada em pares (ou grupos de 3 elementos), cada aluno receberá uma tarefa e um guião. Cada aluno deverá responder às questões na tarefa que será recolhida no final da aula. Os alunos terão um breve momento para observar o guião e a Parte I da tarefa e caso existam dúvidas generalizadas a professora deverá intervir de modo a que todos os alunos iniciem a tarefa nas mesmas condições.
(3) Resolução da Parte I da Tarefa “Estância de Ski” Os alunos resolverão autonomamente a Parte I da Tarefa “Estância de Ski”. Entre as questões 2.(a) e 2.(b) será introduzida a definição de variação de uma função. Esta definição será projetada no quadro para que os alunos a escrevam no seu caderno diário após resolverem a questão 2.(a). Analogamente, entre as questões 2.(b) e 2.(c) os alunos irão contactar com a definição de taxa média de variação que deverão escrever no caderno diário. Ao longo de todo este momento a professora circulará pela sala de modo a apoiar, através do questionamento, os alunos com eventuais dificuldades. Além das dúvidas que os alunos poderão revelar na resolução das questões, estes poderão mostrar algumas dificuldades no trabalho com o *software*. Neste caso a professora deverá encaminhá-los mais uma vez para o guião fornecido no início da aula e, caso persistam as dificuldades, auxiliar os alunos no manuseamento do recurso. Relativamente às questões, de uma forma geral esta parte da tarefa não deverá implicar muitas dúvidas e/ou dificuldades uma vez que estas são, na sua maioria, bastante diretas. No entanto, algumas questões requerem especial cuidado, nomeadamente 1.(a), 2.(b), 2.(c) e 3.(c). Na primeira questão, onde os alunos terão de esboçar o gráfico da função, estes poderão ter algumas dificuldades relativamente ao domínio da função, pelo que a professora deverá questioná-los sobre o contexto do problema de modo a encaminhá-los para o domínio correto.

Nas questões que introduzem a taxa média de variação (2.(b) e 2.(c)) os alunos poderão evidenciar algumas dificuldades uma vez que nunca contactaram com este conceito. Caso estas dificuldades surjam, a professora deverá encaminhar os alunos para a nota da questão 2.(b), de modo a que estes compreendam intuitivamente a noção de variação média. Se mesmo assim os alunos continuarem com dificuldades, a professora deverá recorrer a um exemplo, nomeadamente sobre velocidade média. Sendo uma dúvida geral, a professora interromperá o trabalho dos grupos e dará aos alunos o exemplo de um automobilista que percorre 150 quilómetros entre as 16h00 e as 19h00 e questioná-los-á acerca da velocidade média a que o automobilista efetuou a viagem neste intervalo de tempo. Tendo em conta a proximidade deste exemplo com o quotidiano social, os alunos deverão com facilidade concluir que o automobilista circulou em média a 50 quilómetros por hora. A professora enfatizará a relação entre este exemplo e o cálculo da taxa média de variação, de modo a facilitar a compreensão do conceito por parte dos alunos.

A última questão, 3.(c), poderá levantar algumas dúvidas uma vez que é uma questão mais aberta a que os alunos não estão tão acostumados. Deste modo, caso surjam dúvidas nesta alínea a professora deverá questionar os alunos acerca do comportamento da função num determinado intervalo e da relação que podem estabelecer entre esta e a taxa média de variação no mesmo intervalo. Caso os alunos tenham dificuldades em perceber que se a função é estritamente crescente num determinado intervalo (respetivamente estritamente decrescente) então a taxa média de variação é positiva (respetivamente negativa) no mesmo intervalo, então a professora deverá recorrer a alguns exemplos extra de modo a encaminhar os alunos para a relação pretendida. A professora questionará os alunos sobre a implicação contrária.

Além de apoiar os alunos em eventuais dúvidas, a professora deverá tomar conhecimento das resoluções dos vários grupos para que, na fase de apresentação e discussão, caso exista alguma resolução particularmente interessante ou diferente das restantes, indique a esse(s) grupo(s) para ir ao quadro.

(4) Apresentação e discussão dos resultados da Parte I

Os alunos apresentarão no quadro as suas resoluções, que serão discutidas com a turma caso existam dúvidas ou resoluções diferentes.

Com exceção da questão 3.(c), um grupo (representado por um aluno) irá ao quadro expor a sua resolução. Neste momento os colegas terão oportunidade de interagir colocando dúvidas, caso existam, e o aluno em questão deverá explicar à turma o seu raciocínio. No caso da questão 3.(c), se existirem diferentes conjeturas que a professora considere que devem ser discutidas com toda a turma, os respetivos grupos apresentarão as suas conjeturas, justificando-as perante os colegas que poderão colocar questões se sentirem essa necessidade. Espera-se que alguns alunos consigam usar contraexemplos para evidenciar que a implicação contrária nem sempre se verifica.

O papel da professora será o de mediadora de aprendizagens e gestora das interações, proporcionando um papel central aos alunos. No entanto, caso existam dúvidas generalizadas deverá intervir cuidando que toda a turma realize aprendizagens significativas. Além disso, no final da apresentação de cada questão deverá questionar a turma sobre eventuais dúvidas e particularmente na última questão deverá assegurar-se que todos os alunos compreenderam a relação entre a monotonia da função e a taxa média de variação em determinado intervalo.

(5) Sistematização das aprendizagens

Serão projetadas as definições de variação e de taxa média de variação (que os alunos já deverão ter escrito no caderno diário). A professora enfatizará a importância da noção de taxa média de variação e caso ainda existam dúvidas sobre os conceitos serão esclarecidas neste momento. Posteriormente será projetado um quadro referente à relação entre a monotonia de uma função e a taxa média de variação em determinado intervalo que os alunos deverão registar. Mais uma vez, caso os alunos ainda tenham dúvidas neste momento a professora fará uma explicação para a turma.

(6) Resolução da Parte II da Tarefa "Estância de Ski"

Os alunos resolverão autonomamente a Parte II da Tarefa "Estância de Ski".

Ao longo de todo este momento a professora circulará pela sala de modo a apoiar, através do questionamento, os alunos com eventuais dificuldades.
De uma forma geral, tal como a anterior, esta parte da tarefa não deverá implicar muitas dúvidas e/ou dificuldades uma vez que a maioria dos conceitos são bastante percetíveis e diretos. No entanto, os alunos poderão mostrar algumas dificuldades no trabalho com o *software*, nomeadamente na representação das retas na questão 1.(b). Neste caso, a professora deverá encaminhá-los mais uma vez para o guião fornecido no início da aula e, se persistirem as dificuldades, auxiliar os alunos no manuseamento do recurso. Os alunos poderão também mostrar dificuldades no preenchimento da tabela, no que se refere ao reconhecimento do declive. Se assim for, a professora deverá questionar os alunos sobre a equação reduzida da reta $y = mx + b$ recordando-os do significado de m e b.
Na última questão, caso os alunos mostrem dificuldades em conjeturar a relação entre a taxa média de variação de um intervalo $[a, b]$ e o declive da reta que passa nos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$, a professora deverá questioná-los sobre os valores registados nas tabelas anteriores e caso seja necessário fornecer mais exemplos.

Se durante este momento a professora se aperceber de dúvidas generalizadas deverá interromper a aula e fazer uma explicação para toda a turma.
Além de apoiar os alunos em eventuais dúvidas, a professora deverá tomar conhecimento das resoluções dos vários grupos para que, na fase de apresentação e discussão, caso exista alguma resolução particularmente interessante ou diferente das restantes, indique a esse(s) grupo(s) para ir(em) ao quadro.

(7) Apresentação e discussão dos resultados da Parte II

Os alunos apresentarão as suas resoluções, que serão discutidas com a turma caso existam dúvidas ou resoluções diferentes.
Uma vez que as questões 1.(a) e 1.(b) dão particular ênfase à visualização através do *software*, a apresentação destas alíneas será feita projetando os ficheiros dos próprios alunos. De modo a facilitar a gestão de sala de aula, uma vez que os alunos têm de ligar os seus computadores ao projetor, o grupo que apresentar a resolução da questão 1.(a) apresentará também a 1.(b). Os colegas terão oportunidade de interagir colocando dúvidas, caso existam, e se tiveram representado pontos e/ou retas diferentes das que estão a ser apresentadas deverão dizê-lo e colocar as suas questões. No caso da questão 1.(c), se existirem diferentes conjeturas que a professora considere que devem ser discutidas com toda a turma, os respetivos grupos apresentarão as suas conjeturas, justificando-as perante os colegas que poderão colocar questões.

O papel da professora será o de mediadora de aprendizagens e gestora das interações, proporcionando um papel central aos alunos. No entanto, caso existam dúvidas generalizadas deverá intervir cuidando que toda a turma realize aprendizagens significativas. Além disso, no final da apresentação de cada questão deverá questionar a turma sobre eventuais dúvidas e particularmente na última questão deverá assegurar-se que todos os alunos interiorizaram a interpretação geométrica da taxa média de variação da função num determinado intervalo.

(8) Sistematização das aprendizagens

Será projetado um quadro referente à interpretação geométrica da taxa média de variação de uma função num intervalo $[a, b]$ que os alunos deverão registar no seu caderno diário. A professora deverá enfatizar a importância da interpretação geométrica e o seu significado. Caso ainda existam dúvidas sobre alguns dos conceitos abordados, os alunos deverão colocá-las neste momento sendo que a professora fará uma explicação para a turma.

(9) Encerramento da aula

Os alunos serão informados do trabalho de casa.

Comentário
Tendo em conta o ritmo de trabalho heterogéneo da turma serão propostos como extra: - Proposta 1 da página 136 - Exercício 34 da página 60 - Exercício 38 da página 61 Caso os exercícios 34 e 38 não sejam realizados em aula, serão considerados trabalho de casa.

AGRUPAMENTO DE ESCOLAS DE CANEÇAS

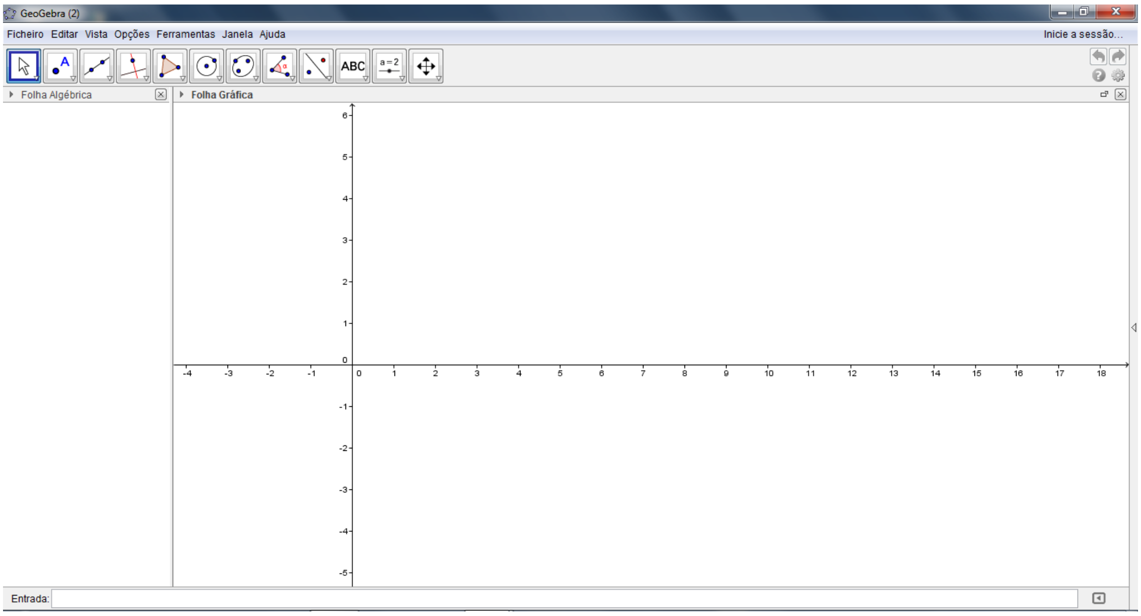
MATEMÁTICA A
11.º ano
fevereiro 2015

NOME: ______________________________ TURMA ______

Guião GeoGebra

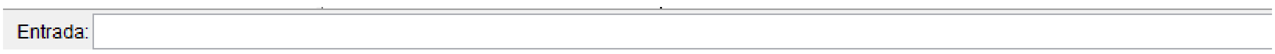
Ao iniciares…

Quando abrires o GeoGebra deverás encontrar uma janela semelhante a esta.



Introduzir pontos, funções, retas…

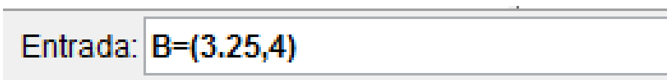
Se quiseres introduzir uma função, um ponto ou uma reta deves escrever o que pretendes onde diz “Entrada”



- Se quiseres introduzir o **ponto** $A(1,2)$ deves escrever na “Entrada”: A=(1,2) e em seguida clica “Enter” (Nota: Os pontos têm de ser escritos com letra maiúscula).

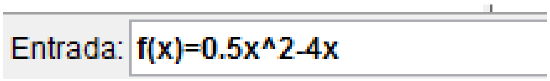
- Se quiseres introduzir o **ponto** $B(3{,}25;4)$ deves escrever na “Entrada”: B=(3.25,4) e em seguida clica em “Enter”

Nota: A vírgula dos números decimais deve ser escrita com um ponto.

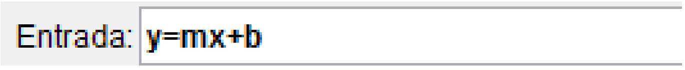


- Se quiseres introduzir uma **função** deves escrever na “Entrada” como se exemplifica na imagem e em seguida clicar em “Enter”.

Nota: Quando quiseres escrever uma potência utiliza o símbolo ^

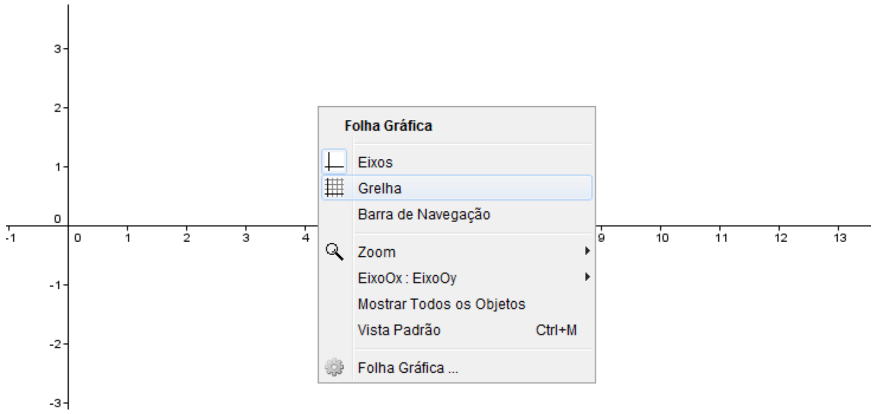


- Se quiseres introduzir uma **reta** $\boldsymbol{y} = mx + b$ deves escrever na “Entrada”: $y = mx + b$, com m e b que pretendas e em seguida clica em “Enter”

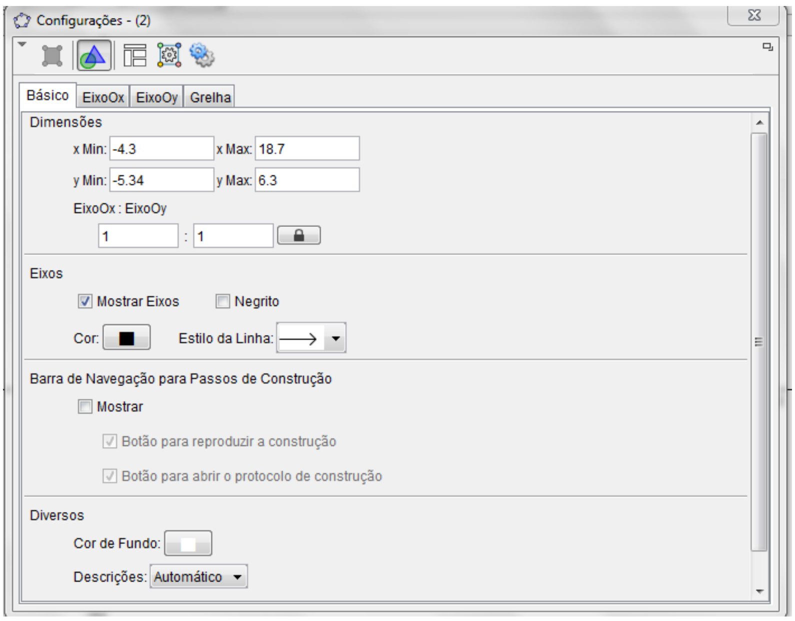


Ajustar domínios, escalas…

Se quiseres ajustar o domínio da função ou a escala do gráfico deves com o cursor na folha gráfica clicar no botão direito do rato e selecionar “Folha Gráfica”.

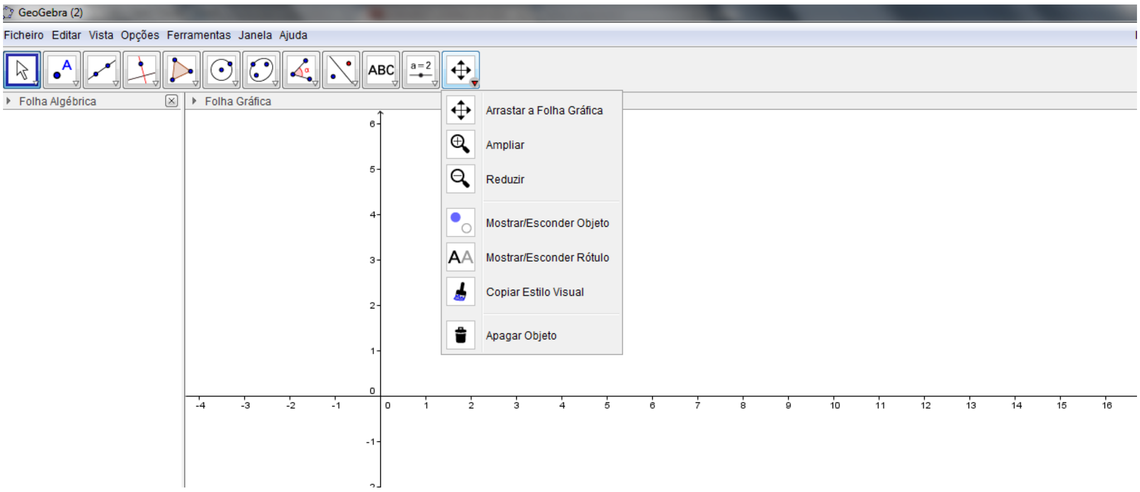


Irá aparecer-te a seguinte janela onde terás de introduzir os valores de x e/ou y que pretenderes.



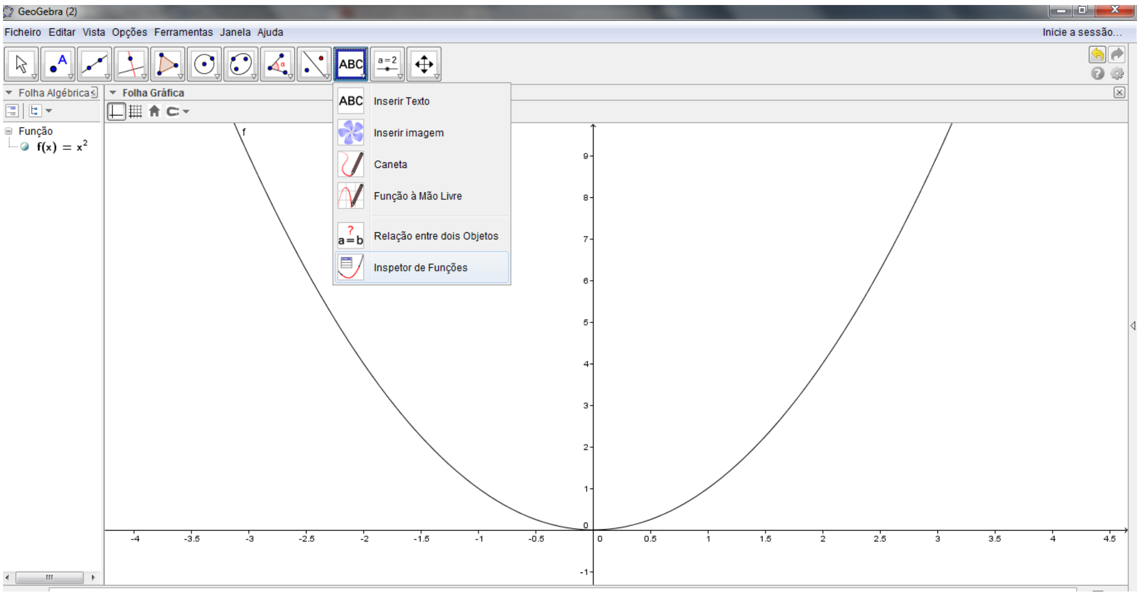
Ampliar, reduzir, mover imagens …

Se quiseres ampliar, reduzir ou mover a imagem no teu ecrã deves selecionar a opção pretendida, como na imagem

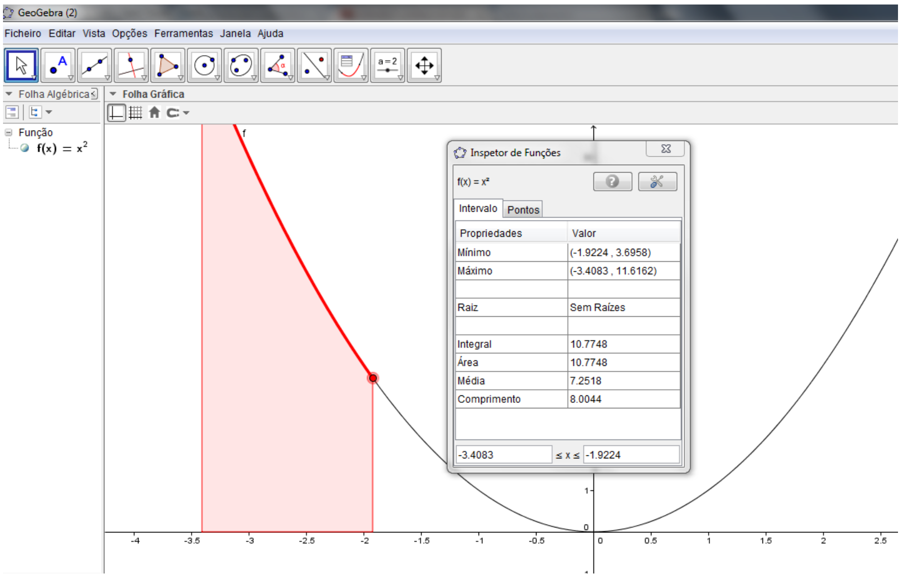


Encontrar extremos, zeros…

Se quiseres calcular máximos, mínimos, zeros, entre outros, de uma função recorre ao "Inspetor de Funções" como mostra a imagem seguinte.



Após clicares em "Inspetor de Funções" clica com o botão esquerdo em cima da curva da função. Em seguida aparecer-te-á uma imagem semelhante à seguinte

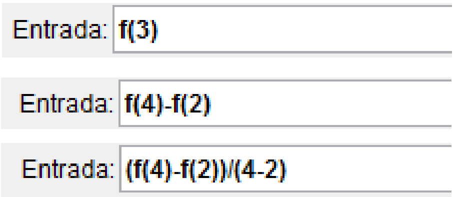


Para aumentares ou diminuíres a zona de inspeção (zona a vermelho) clica sobre a bola vermelha e arrasta-a para onde pretenderes.

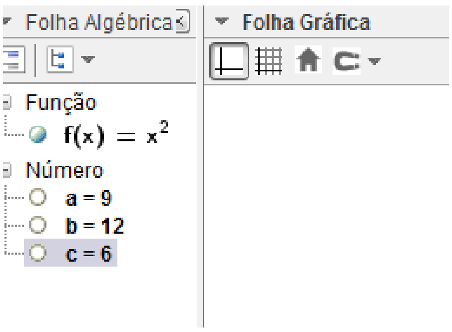
Realizar operações com funções

Podes realizar operações simples com funções, nomeadamente **determinar imagens**, **produtos, somas, diferenças** , entre outros, como nas imagens seguintes.

Nota: Atenção aos parêntesis, quando necessários, numa expressão com várias operações.

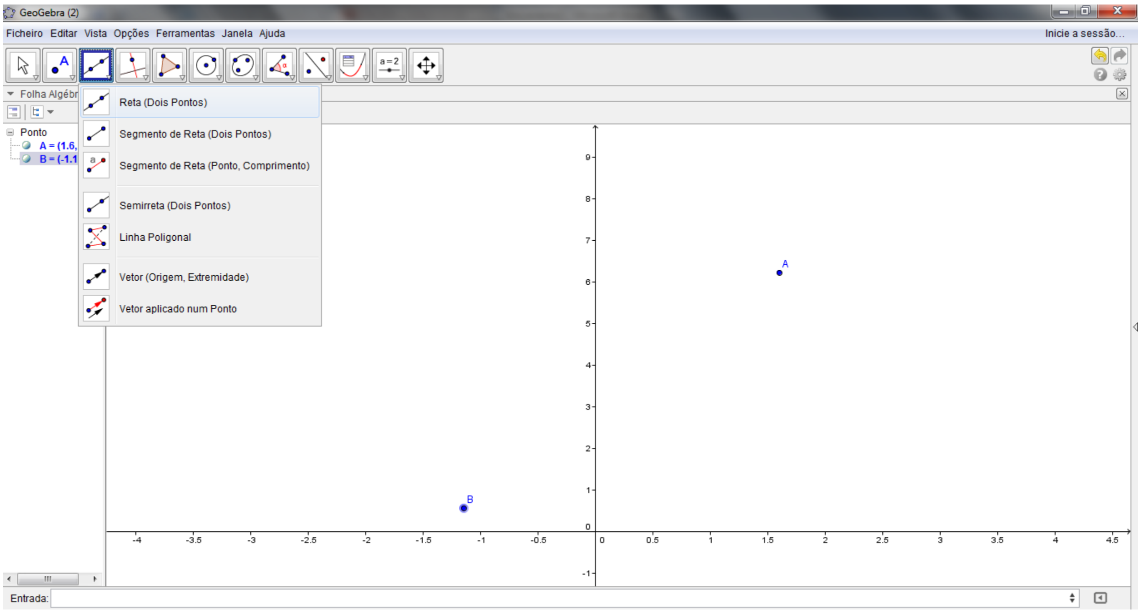


Os resultados destas operações irão aparecer na Folha Algébrica com uma apresentação do tipo: a=9, b=12….



Construir retas, semirretas…

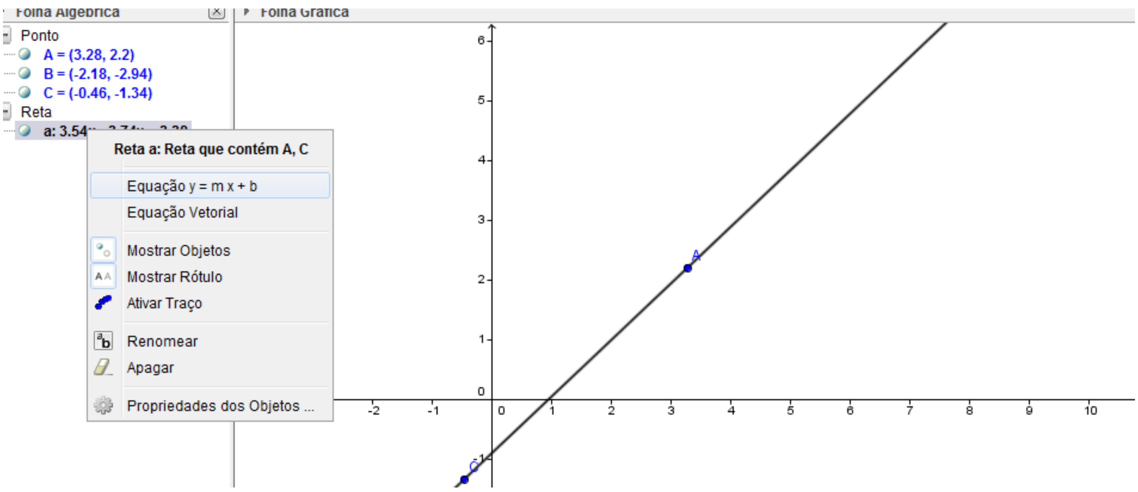
Para determinares uma reta dados dois pontos recorre ao ícone como na imagem



De seguida clica nos dois pontos que pretendes, um de cada vez.

Nota: Assim que clicares no primeiro ponto surgirá uma reta que deverás fixar clicando no segundo ponto.

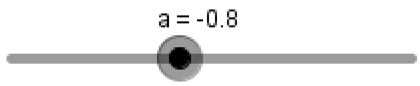
<u>Importante:</u> A equação que o GeoGebra te apresenta de uma reta não está escrita na forma de equação reduzida. Para tal deves clicar sobre a equação da reta dada e com o botão direito do rato selecionar a opção “Equação $y = mx + b$”



Seletores…

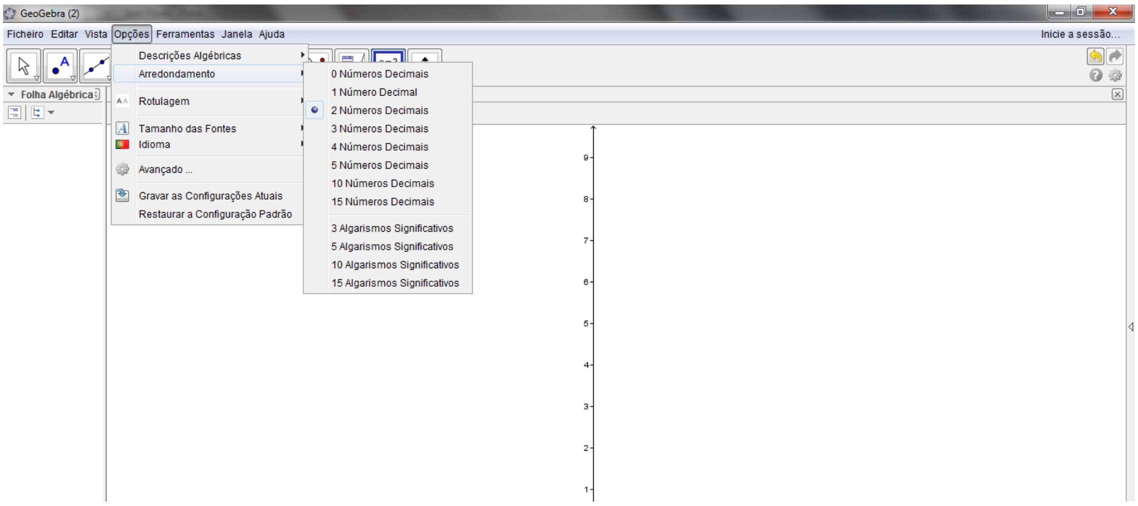
Dado um seletor a, podes alterar o valor de a introduzindo na “Entrada”: a=3, por exemplo e em seguida clicar em “Enter”. Verás que o seletor muda automaticamente para o valor que introduziste, desde que o valor esteja no domínio do seletor.

Para fazeres variar o valor de a diretamente no seletor, clica na bola preta e arrasta-a para a direita ou esquerda consoante o valor que pretendas.



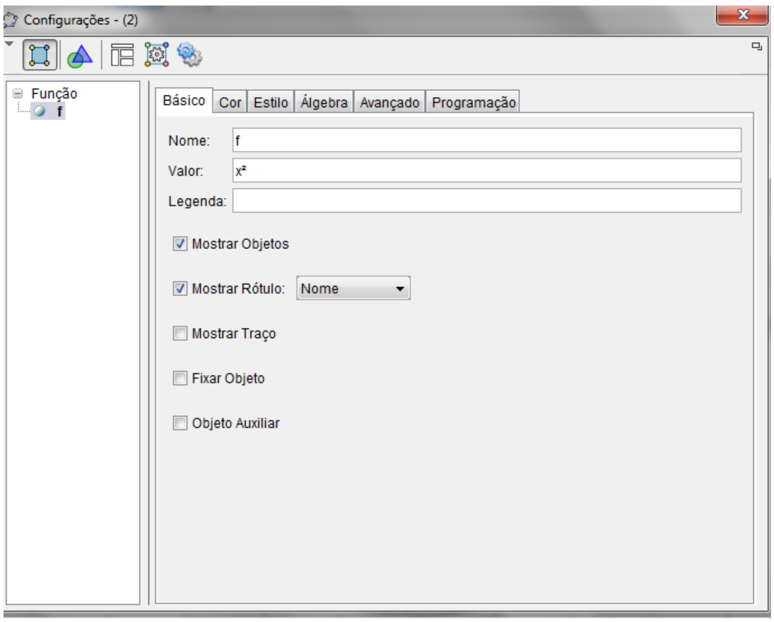
Observações:

Se for necessário alterar o **número de casas decimais** mostradas pelo GeoGebra deves clicar em "Opções" tal como na imagem.



Se for necessário **alterar cor, estilo** (linhas a tracejado, opacidade...) de um objeto, coloca o cursor no objeto e clica no botão direito do rato. Seleciona "Propriedades dos Objetos".

Aparecerá, em seguida, uma janela como na imagem onde selecionarás a opção que pretendes.



Anexo 1.2. Planificação 2.ª aula

Aula de 27 de fevereiro de 2015 – Plano de Aula

Matemática	Introdução ao Cálculo Diferencial I	Ano/Turma: 11º[redacted]

Sumário
Noção de taxa de variação e interpretação geométrica: tarefa de exploração. Definição de derivada.

Objetivos
Compreender a interpretação geométrica de taxa média de variação. Compreender a noção de taxa de variação de uma função num determinado instante (derivada) e a sua interpretação geométrica.

Recursos			
Professor	Manual escolar Tarefa “Estância de Ski” Tarefa “Continuando na Estância de Ski” Projetor Computador Portátil	Aluno	Computador portátil Tarefa “Estância de Ski” Tarefa “Continuando na Estância de Ski” Guião GeoGebra Manual escolar

Principais Tópicos e conceitos envolvidos	**Capacidades Transversais**
Interpretação geométrica de taxa média de variação. Noção de taxa de variação. Interpretação geométrica da taxa de variação. Definição de derivada.	Comunicação Matemática Raciocínio Matemático

Metodologia de trabalho
Discussão e sistematização dos resultados da parte II da tarefa "Estância de Ski" em grande grupo. Introdução do conceito de taxa de variação/derivada e respetiva interpretação geométrica através da resolução da tarefa de exploração "Continuando na Estância de Ski", em pares ou grupos de 3 elementos, recorrendo ao *software* de geometria dinâmica GeoGebra. Discussão dos resultados e sistematização dos conceitos envolvidos em grande grupo.

Momentos da aula	Tempo Previsto – Aula 90 minutos
(1) Entrada dos alunos. Ditado do sumário. Registo das faltas.	5min
(2) Apresentação e discussão dos resultados da Parte II da Tarefa "Estância de Ski"[2]	10min
(3) Sistematização das aprendizagens[3]	10min
(4) Apresentação da Tarefa "Continuando na Estância de Ski"	3min
(5) Resolução da Parte I da Tarefa "Continuando na Estância de Ski"	15min
(6) Apresentação e discussão dos resultados da Parte I da Tarefa "Continuando na Estância de Ski"	10min
(7) Sistematização das aprendizagens	10min
(8) Resolução da Parte II da Tarefa "Continuando na Estância de Ski"	15min
(9) Apresentação e discussão dos resultados da Parte II da tarefa "Continuando na Estância de Ski"	10min
(10) Encerramento da aula	2min

Desenvolvimento da Aula
(1) Ditado do sumário e registo das presenças dos alunos.
(2) Apresentação e discussão dos resultados da Parte II da Tarefa "Estância de Ski" Os alunos apresentarão as suas resoluções, que serão discutidas com a turma caso existam dúvidas ou resoluções diferentes. De modo a facilitar a gestão de sala de aula, a professora projetará os pontos e as retas referentes às questões 1.(a) e 1.(b). Em seguida questionará os alunos de modo a verificar que todos criaram os mesmos pontos e retas. Posteriormente será projetada a tabela da questão 1.(b) e a professora pedirá a quatro alunos, um para cada uma das retas, que indique qual a equação e respetivo declive da reta em questão. Após cada aluno referir a equação da reta a que chegou a professora questionará a restante turma, de modo a verificar que todos chegaram às mesmas conclusões. No caso da questão 1.(c), se existirem diferentes conjeturas que a professora considere que devem ser discutidas com toda a turma, os respetivos grupos apresentarão as suas conjeturas, justificando-as perante os colegas que poderão colocar questões se sentirem essa necessidade. No final da apresentação desta questão a professora deverá questionar a turma de modo a assegurar-se que todos os alunos interiorizaram a interpretação geométrica da taxa média de variação da função num determinado intervalo. Caso existam dúvidas, a professora deverá

[2] Não concretizado na aula anterior
[3] Não concretizado na aula anterior

recorrer a outros exemplos e fazer uma explicação para a turma.

(3) Sistematização das aprendizagens

Será projetado um quadro referente à interpretação geométrica da taxa média de variação de uma função num intervalo $[a, b]$ que os alunos deverão registar no seu caderno diário. A professora deverá enfatizar a importância da interpretação geométrica e o seu significado. Caso ainda existam dúvidas sobre alguns dos conceitos abordados, os alunos deverão colocá-las neste momento sendo que a professora fará uma explicação para a turma.

(4) Apresentação da Tarefa "Continuando na Estância de Ski"

Os alunos serão informados sobre a organização da aula, nomeadamente no que se refere à metodologia de trabalho. A professora relembrará a forma como os alunos devem utilizar o *software* de geometria dinâmica GeoGebra e indicará que devem recorrer ao guião de trabalho com o s*oftware* entregue na aula anterior. Além disso, a professora informará que a tarefa está dividida em duas partes e que só após a resolução e discussão da primeira parte será entregue a segunda.

Apesar de a tarefa ser realizada em pares (ou grupos de 3 elementos), cada aluno receberá uma tarefa. Cada aluno deverá responder às questões na tarefa que será recolhida no final da aula.

Os alunos terão um breve momento para observar a tarefa e caso existam dúvidas generalizadas a professora deverá intervir de modo a que todos os alunos iniciem a tarefa nas mesmas condições.

(5) Resolução da Parte I da Tarefa "Continuando na Estância de Ski"

Os alunos resolverão autonomamente a Parte I da Tarefa "Continuando na Estância de Ski".

Ao longo de todo este momento a professora circulará pela sala de modo a apoiar, através do questionamento, os alunos com eventuais dificuldades.

De uma forma geral as duas primeiras questões não deverão implicar muitas dúvidas e/ou dificuldades uma vez que são bastante percetíveis e diretas. No entanto, os alunos poderão mostrar algumas dificuldades no trabalho com o *software*, no que diz respeito especialmente à utilização do seletor. Se tal ocorrer a professora deverá encaminhá-los mais uma vez para o guião fornecido na aula anterior e, caso persistam as dificuldades, auxiliar os alunos no manuseamento do recurso. Poderão ainda surgir dificuldades na escolha dos valores de h, pelo que a professora deverá relembrar aos alunos a relação entre os intervalos anteriores (com amplitudes cada vez menores) de modo a que estes percebam que será essa a lógica que deverão usar na seleção dos valores de h. A última questão, 1.(c), poderá levantar algumas dúvidas uma vez que é uma questão mais aberta a que os alunos não estão tão acostumados. Deste modo, caso surjam dúvidas nesta alínea, a professora deverá questionar os alunos acerca da relação entre os valores da taxa média de variação que calcularam e encaminhá-los para a conjetura correta fazendo questões como "De que valor é nos estamos a aproximar?", "Quanto menor é a amplitude do intervalo o que podes dizer sobre a taxa média de variação?". De modo a auxiliar os alunos nesta conjetura a professora poderá sugerir-lhes também que utilizem o seletor para que se apercebam que o valor da taxa média de variação tende para 1 quando h tende para 0.

Se durante este momento a professora se aperceber de dúvidas ou dificuldades generalizadas deverá interromper a aula e fazer uma explicação para toda a turma.

Além de apoiar os alunos em eventuais dúvidas, a professora deverá tomar conhecimento das resoluções dos vários grupos para que, na fase de apresentação e discussão, caso exista alguma resolução particularmente interessante ou diferente das restantes, indique a esse(s) grupo(s) para ir(em) ao quadro.

(6) Apresentação e discussão dos resultados da Parte I da Tarefa "Continuando na Estância de Ski"

Os alunos apresentarão no quadro as suas resoluções, que serão discutidas com a turma caso existam dúvidas ou resoluções diferentes.

	Na questão 1.(a) a professora projetará a tabela que os alunos preencheram na ficha e questionará os alunos, um para cada intervalo, sobre o valor da taxa média de variação. No final do preenchimento de cada linha da tabela a professora deverá questionar a turma de modo a verificar que todos chegaram aos mesmos valores para a taxa média de variação nos respetivos intervalos. Na questão 1.(b) a professora adotará o mesmo método, pedindo a alguns alunos (um para cada valor de h) que indiquem à turma o valor de h pelo qual optaram, bem como o respetivo intervalo e valor de taxa média de variação. Durante este momento os alunos serão voluntários, pelo que a professora não saberá previamente que valores de h selecionaram. Assim, caso os valores selecionados pelos alunos não vão ao encontro do pretendido (valores de h cada vez mais pequenos) a professora deverá selecionar outro aluno, explicando à turma o porquê desta escolha, enfatizando assim, mais uma vez, a lógica que foi seguida na escolha dos valores de h. Caso algum grupo/aluno tenha optado por uma lógica diferente e, mesmo com apresentação no quadro, continue com dúvidas, deverá colocar as suas questões de modo a ficar esclarecido. No caso da questão 1.(c), se existirem diferentes conjeturas que a professora considere que devem ser discutidas com toda a turma, os respetivos grupos apresentarão as suas conjeturas, justificando-as perante os colegas que poderão colocar questões se sentirem essa necessidade. O papel da professora será o de mediadora de aprendizagens e gestora das interações, proporcionando um papel central aos alunos. No entanto, caso existam dúvidas generalizadas deverá intervir cuidando que toda a turma realize aprendizagens significativas. Além disso, no final da apresentação de cada questão deverá questionar a turma sobre eventuais dúvidas e particularmente na última questão deverá assegurar-se que todos os alunos compreenderam para que valor tende a taxa média de variação, quando os intervalos têm amplitudes cada vez menores.
(7)	Sistematização das aprendizagens A professora deverá, na sequência da última questão apresentada, introduzir a terminologia "taxa de variação" no instante $t = 5$ e generalizar esta definição para qualquer instante $x = x_0$. Será então projetado um quadro referente à definição de taxa de variação de uma função para $x = x_0$ que os alunos deverão registar no seu caderno diário. A professora deverá enfatizar a importância deste conceito para toda a unidade de ensino e para a Matemática em geral. Deverá ainda realçar a nova terminologia que lhes é apresentada: "derivada". Tendo em conta as possíveis definições de taxa de variação/derivada que os alunos terão de utilizar, a professora fará uma breve explicação da relação entre as duas definições, isto é, explicará o aparecimento da definição de derivada através do limite quando x tende para x_0. Caso existam dúvidas sobre alguns dos conceitos abordados, os alunos deverão colocá-las neste momento, sendo que a professora fará uma explicação para a turma.
(8)	Resolução da Parte II da Tarefa "Continuando na Estância de Ski" Os alunos resolverão autonomamente a Parte II da Tarefa "Continuando na Estância de Ski". Ao longo de todo este momento a professora circulará pela sala de modo a apoiar, através do questionamento, os alunos com eventuais dificuldades. De uma forma geral, as duas primeiras questões não deverão implicar muitas dúvidas e/ou dificuldades uma vez que já na aula anterior os alunos representaram pontos e retas recorrendo ao GeoGebra. No entanto, caso os alunos mostrem algumas dificuldades no trabalho com o *software*, em especial na representação das retas na questão 1.(b), a professora deverá encaminhá-los mais uma vez para o guião fornecido na aula anterior e, caso persistam as dificuldades, auxiliar os alunos no manuseamento do recurso. Os alunos poderão também mostrar dificuldades no preenchimento da tabela, na alínea (i) no que se refere ao reconhecimento do declive. Neste caso a professora deverá relembrar o que foi feito na aula anterior e além disso questionar os alunos sobre a equação reduzida da reta $y = mx + b$, recordando-os do significado de m e b. No caso da questão 1. (b) (ii) os alunos poderão mostrar algumas dificuldades em relacionar o declive das sucessivas retas com a taxa de variação no instante $t = 5$. Se tal acontecer a

professora deverá questioná-los acerca dos pontos através dos quais definiram as respetivas retas encaminhando-os para a sucessiva “proximidade” ao ponto A. A professora questionará os alunos acerca da abcissa do ponto A e pedir-lhes-á que relacionem esta informação com as suas conclusões na questão 1.(c) da Parte I. Desde modo, os alunos deverão compreender que à medida que nos aproximamos do ponto A, o declive tende para 1, o que vai ao encontro da taxa de variação para $t=5$.

Na questão 1. (b) (iii) as principais dificuldades esperadas remetem para a utilização do *software* no sentido de fazer variar o valor de h. Assim, se necessário, a professora deverá encaminhá-los mais uma vez para o guião fornecido na aula anterior e, caso persistam as dificuldades, auxiliar os alunos no manuseamento do recurso.

Na questão 1.(c) caso os alunos mostrem dificuldades em encontrar a equação reduzida da reta para a representarem graficamente, a professora deverá questioná-los acerca do que aprenderam no 10.º ano, nomeadamente sobre a forma como determinam o valor de b. Na alínea (i) os alunos poderão evidenciar algumas dificuldades em designar corretamente a posição da reta r relativamente ao gráfico de f. Neste caso, a professora deverá questioná-los acerca da reta r e da forma como esta se relaciona com o gráfico de f. Poderá ainda perguntar-lhes se o gráfico de f e a reta r se tocam e neste caso em que ponto(s).

Na alínea (ii) é expectável que os alunos demonstrem algumas dificuldades em relacionar o declive da reta r e o declive das retas consideradas anteriormente. Neste caso, a professora deverá questioná-los acerca da variação do declive das retas e do valor do qual este se aproxima. Deverá também fazer uma analogia com a taxa de variação, encaminhando os alunos para o uso do termo limite.

Na alínea (iii) caso os alunos mostrem dificuldades em interpretar, do ponto de vista geométrico, a taxa de variação da função f no ponto $t=5$, a professora deverá questioná-los sobre os valores registados nas tabelas anteriores e sobre a definição de taxa de variação. Além disso, deverá relembrar-lhes o que foi feito na aula anterior, relativamente ao declive da reta que passa nos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ e a sua relação com a taxa média de variação no intervalo $[a, b]$.

Se durante este momento a professora se aperceber de dúvidas generalizadas deverá interromper a aula e fazer uma explicação para toda a turma.

Além de apoiar os alunos em eventuais dúvidas, a professora deverá tomar conhecimento das resoluções dos vários grupos para que, na fase de apresentação e discussão, caso exista alguma resolução particularmente interessante ou diferente das restantes, indique a esse(s) grupo(s) para ir(em) ao quadro.

(9) Apresentação e discussão dos resultados da Parte II

Os alunos apresentarão as suas resoluções, que serão discutidas com a turma caso existam dúvidas ou resoluções diferentes.

De modo a facilitar a gestão de sala de aula, a professora projetará o ficheiro de GeoGebra referente aos pontos e às retas das questões 1.(a) e 1.(b), questionando a turma sobre os pontos e retas que criaram, de modo a assegurar-se que todos estão nas mesmas circunstâncias. Posteriormente, será projetada a tabela da questão 1.(b)(i) e a professora pedirá a quatro alunos, um para cada uma das retas, que indique qual a equação e respetivo declive da reta em questão. Após cada aluno referir a equação da reta a que chegou a professora questionará a restante turma, de modo a verificar que todos chegaram às mesmas conclusões.

Na questão 1.(b).(ii) a professora questionará um aluno sobre a variação do declive das sucessivas retas e a sua relação com os resultados obtidos anteriormente. Este aluno deverá apresentar a sua conjetura e explicar o seu raciocínio aos colegas. Caso algum aluno não tenha chegado à conclusão pretendida e/ou não compreenda a conjetura do colega deverá colocar as suas questões e caso seja necessário a professora fará uma nova explicação.

No caso da questão 1.(b).(iii) a professora pedirá a um aluno que se desloque ao computador que estará a projetar para que construa a reta AF e faça varia o valor de h de modo a que toda a turma acompanhe o processo.

Na questão 1.(c)(i) a professora projetará a reta em questão e um aluno irá ao quadro escrever a equação reduzida da reta r, justificando todos os cálculos. Além disso, deverá indicar explicitamente a posição relativa da mesma em relação ao gráfico da função f. Na questão 1.(c)(ii) a professora questionará um aluno sobre a relação entre o declive da reta r e das retas anteriores. Este aluno deverá explicar à turma a sua conclusão, e caso existam dúvidas os colegas poderão questionar a qualquer momento. De forma semelhante, a questão 1.(c).(iii) será apresentada por um aluno, que deverá explicar a sua conjetura à turma, justificando o seu raciocínio. Caso existam diferentes conjeturas que a professora considere que devem ser discutidas com toda a turma, os respetivos alunos/grupos apresentarão as suas conjeturas, justificando-as perante os colegas que poderão colocar questões se sentirem essa necessidade.

O papel da professora será o de mediadora de aprendizagens e gestora das interações, proporcionando um papel central aos alunos. No entanto, caso existam dúvidas generalizadas deverá intervir cuidando que toda a turma realize aprendizagens significativas. Além disso, no final da apresentação de cada questão a professora deverá questionar a turma sobre eventuais dúvidas e particularmente na última questão deverá assegurar-se que todos os alunos interiorizaram a interpretação geométrica da taxa de variação da função num determinado instante.

(10) Encerramento da aula

Os alunos serão informados do trabalho de casa.

Comentário

Tendo em conta o ritmo de trabalho heterogéneo da turma serão propostos como extra:

- Exercícios 34, 38, respetivamente, das páginas 60 e 61 do manual escolar

Caso estes exercícios não sejam realizados em aula, serão considerados trabalho de casa.

Anexo 1.3. Planificação 3.ª aula

Aula de 2 de março de 2015 – Plano de Aula

Matemática	Introdução ao Cálculo Diferencial I	Ano/Turma: 11º[redacted]

Sumário
Continuação da tarefa de exploração iniciada na aula anterior. Taxa média de variação, taxa de variação e derivada: tarefas de aplicação.

Objetivos
Compreender a interpretação geométrica de taxa de variação (derivada) de uma função num determinado instante. Consolidar as noções de taxa média de variação, taxa de variação e derivada.

Recursos			
Professor	Tarefa “Continuando na Estância de Ski” Manual escolar Projetor Computador Portátil	Aluno	Tarefa “Continuando na Estância de Ski” Manual escolar Calculadora gráfica

Principais Tópicos e conceitos envolvidos	Capacidades Transversais
Noção de taxa média de variação; cálculo da taxa média de variação. Noção de taxa de variação. Interpretação geométrica da taxa de variação. Definição de derivada.	Comunicação Matemática Raciocínio Matemático

Metodologia de trabalho
Discussão e sistematização dos resultados da tarefa “Continuando na Estância de Ski” em

grande grupo. Na restante aula os alunos trabalharão autonomamente. O trabalho será realizado individualmente ou em pares, de acordo com a opção dos alunos, tendo em conta a disposição destes em sala de aula e os seus hábitos de trabalho. Em alguns momentos haverá lugar à apresentação, no quadro, do trabalho realizado. O exemplo do cálculo da equação reduzida da reta tangente de uma função num determinado ponto será feito em grande grupo.

Momentos da aula	Tempo Previsto – Aula 90 minutos
(1) Entrada dos alunos. Ditado do sumário. Registo das faltas.	5min
(2) Conclusão da apresentação e discussão dos resultados da Parte II da Tarefa "Continuando na Estância de Ski"[4]	15min
(3) Sistematização das Aprendizagens	10min
(4) Correção do trabalho de casa	15min
(5) Resolução e apresentação dos resultados do exercício 41 da página 63 do manual escolar.	13min
(6) Exemplo do cálculo da equação reduzida da reta tangente ao gráfico de uma função num determinado ponto	10min
(7) Resolução de tarefas do manual escolar e apresentação dos resultados.	20min
(8) Encerramento da aula	2min

Desenvolvimento da Aula
(1) Ditado do sumário e registo das presenças dos alunos.
(2) Conclusão da apresentação e discussão dos resultados da Parte II da Tarefa "Continuando na Estância de Ski" Os alunos apresentarão as suas resoluções das diversas alíneas da questão 1.(c) que serão discutidas com a turma caso existam dúvidas ou resoluções diferentes. No caso da questão 1.(c)(i) a professora projetará a reta em questão e um aluno irá ao quadro escrever a equação reduzida da reta r, justificando todos os cálculos. Além disso, deverá indicar explicitamente a posição relativa da mesma em relação ao gráfico da função f. Na questão 1.(c)(ii) a professora questionará um aluno sobre a relação entre o declive da reta r e das retas anteriores. Este aluno deverá explicar à turma a sua conclusão, e caso existam dúvidas, os colegas poderão questionar a qualquer momento. De forma semelhante, a questão 1.(c).(iii) será apresentada por um aluno, que deverá explicar a sua conjetura à turma, justificando o seu raciocínio. Caso existam diferentes conjeturas que a professora considere que devem ser discutidas com toda a turma, os respetivos alunos apresentarão as suas conjeturas, justificando-as perante os colegas que poderão colocar questões se sentirem essa necessidade. O papel da professora será o de mediadora de aprendizagens e gestora das interações, proporcionando um papel central aos alunos. No entanto, caso existam dúvidas generalizadas deverá intervir cuidando que toda a turma realize aprendizagens significativas. Além disso, no final da apresentação de cada questão deverá questionar a turma sobre eventuais dúvidas e particularmente na última questão deverá assegurar-se que todos os alunos interiorizaram a interpretação geométrica da taxa de variação da função num determinado instante.

[4] Não concluído na aula anterior

(3) Sistematização das Aprendizagens Será projetado um quadro referente à interpretação geométrica da taxa de variação de uma função num determinado instante que os alunos deverão registar no seu caderno diário. A professora deverá enfatizar a importância da interpretação geométrica e o seu significado. Caso existam dúvidas sobre alguns dos conceitos abordados, os alunos deverão colocá-las neste momento sendo que a professora fará uma explicação para a turma.
(4) Correção do trabalho de casa Neste momento alguns alunos irão ao quadro apresentar as suas resoluções dos exercícios 34 e 38, respetivamente das páginas 60 e 61 do manual escolar. Estes alunos deverão explicar as suas resoluções aos colegas que poderão interromper caso tenham dúvidas. Caso a professora se aperceba de dúvidas generalizadas deverá intervir fazendo uma explicação para toda a turma.
(5) Resolução e apresentação dos resultados do exercício 41 da página 63 do manual escolar. Os alunos resolverão autonomamente o exercício 41 da página 63 do manual escolar. Durante este momento a professora circulará pela sala de modo a apoiar, através do questionamento, os alunos em eventuais dificuldades. Não são expectáveis muitas dificuldades uma vez que é um exercício bastante simples. No entanto, será a primeira vez que os alunos têm de aplicar a noção de taxa de variação (derivada) e a sua interpretação geométrica. Assim, caso os alunos não consigam identificar o valor que lhes é apresentado como a derivada da função no ponto de abcissa 2 e portanto como o declive da reta tangente ao gráfico da função no ponto de abcissa 2, a professora deverá questioná-los acerca do que foi feito anteriormente e sobre a definição e significado de derivada (taxa de variação). Caso os alunos tenham dúvidas em relação a este conceito a professora deverá encaminhá-los para os quadros verdes da página 63 e, se necessário, fazer uma breve explicação. Se após reconhecerem que o valor do declive da reta pretendida é -4 os alunos tiverem dificuldade em calcular o valor de b a professora deverá questioná-los acerca do processo que conhecem para encontrar a ordenada na origem dada a equação reduzida da reta e um ponto da mesma. Se durante este momento a professora se aperceber de dúvidas ou dificuldades generalizadas deverá interromper a aula e fazer uma explicação para toda a turma. Depois deste momento de trabalho autónomo, um aluno irá ao quadro apresentar a sua resolução que deverá explicar aos colegas. A professora, no final da explicação, deverá reforçar a definição de derivada e a sua interpretação geométrica. Caso existam dúvidas sobre a resolução do exercício a professora fará uma explicação para a turma.
(6) Exemplo do cálculo da equação reduzida da reta tangente ao gráfico de uma função num determinado ponto Este momento tem por base a importância que o cálculo da equação da reta tangente ao gráfico de uma função num determinado ponto tem para toda a unidade de ensino e para o estudo de derivadas em geral. Além disso, tendo em conta que os alunos não estão familiarizados com a manipulação de cálculos com limites, a professora fará o primeiro exemplo deste tipo de exercício de modo a fornecer aos alunos as ferramentas necessárias para o trabalho autónomo no futuro. Assim, a professora fará, no quadro, em interação com os alunos, o exercício resolvido 1. da página 65 da manual escolar. A professora escreverá a função $f(x) = 2x^2 - 3$ e indicará que irá calcular uma equação da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa 2. Inicialmente, a professora questionará os alunos acerca dos seus conhecimentos sobre a relação entre a equação da reta tangente e a derivada de uma função num ponto. Além disso, pedirá aos alunos que recordem a definição de derivada dada na aula anterior. Em seguida, procederá ao cálculo de $f'(2)$ através do limite quando h tende para zero, que será o declive da reta pretendida. Posteriormente calculará o valor da ordenada na origem através do processo de

substituição que os alunos conhecem desde o 10. º ano de escolaridade.
Os alunos deverão registar este exemplo no seu caderno diário e caso existam dúvidas deverão colocá-las de modo a que a professora faça uma explicação para toda a turma.

(7) Resolução de tarefas do manual escolar

Os alunos resolverão autonomamente, pela seguinte ordem, o exercício 43 da página 65 e a Proposta 2 da página 136.

Ao longo de todo este momento a professora circulará pela sala de modo a apoiar, através do questionamento, os alunos com eventuais dificuldades.
De uma forma geral, as dificuldades previstas no exercício 43 relacionam-se com a manipulação algébrica dos cálculos com limites e com o cálculo da equação da reta tangente. Caso os alunos evidenciem estas dificuldades a professora deverá relembrar-lhes o exemplo que foi feito anteriormente e encaminhá-los para a leitura da página 65. Relativamente à Proposta 2, se os alunos demonstrarem dificuldades no cálculo da taxa média de variação, especialmente no caso da alínea 1.3., a professora deverá questioná-los acerca do que foi feito nas duas aulas anteriores e se for necessário encaminhá-los para as páginas 60 e 61 do manual.
Se durante este momento a professora se aperceber de dúvidas ou dificuldades generalizadas deverá interromper a aula e fazer uma explicação para toda a turma.

Após o trabalho autónomo, alguns alunos irão ao quadro apresentar as suas resoluções. Caso existam dúvidas, o aluno que estiver no quadro deverá explicar aos colegas a sua resolução e se mesmo assim as dúvidas persistirem a aula será interrompida e a professora fará uma explicação para a turma.
Tendo em conta a fase inicial da determinação da equação da reta tangente ao gráfico de uma função num determinado ponto através da definição de derivada, o aluno que irá ao quadro apresentar a resolução do exercício 43 deverá justificar todos os seus cálculos e no final a professora deverá questionar toda a turma sobre eventuais dúvidas ou dificuldades, que caso existam serão de imediato esclarecidas.

(8) Encerramento da aula

Os alunos serão informados do trabalho de casa.

Comentário

Tendo em conta o ritmo de trabalho heterogéneo da turma serão propostos como extra os exercícios 40 e 44, respetivamente das páginas 63 e 66 do manual escolar.

Caso alguma das tarefas propostas para a aula não seja realizada será considerada trabalho de casa.

Anexo 1.4. Planificação 4.ª aula

Aula de 2 de março de 2015 – Plano de Aula

Matemática	Introdução ao Cálculo Diferencial I	Ano/Turma: 11º[redacted]

Sumário
Função Derivada: tarefa de exploração. Derivada de algumas funções. Resolução de exercícios do manual escolar.

Objetivos
Compreender a noção de derivada enquanto função. Calcular a função derivada das funções afim e funções polinomiais de 2.º e 3.º grau.

Recursos			
Professor	Manual escolar Tarefa "Derivando ponto a ponto" Projetor Computador Portátil Calculadora gráfica	Aluno	Manual escolar Tarefa "Derivando ponto a ponto" Calculadora gráfica

Principais Tópicos e conceitos envolvidos	Capacidades Transversais
Determinação da derivada em casos simples: função afim, funções polinomiais do 2.º e 3.º grau	Comunicação Matemática Raciocínio Matemático

Metodologia de trabalho
Introdução ao conceito de função derivada através da resolução da tarefa de exploração "Derivando ponto a ponto", em pares ou grupos de 3 elementos, recorrendo à calculadora gráfica. Discussão dos resultados em grande grupo e sistematização dos conceitos envolvidos.

Determinação da função derivada da função $f(x) = ax^2$ em grande grupo. Função derivada de uma função afim, da função polinomial de 2º grau completa e da função polinomial de 3º grau, em grande grupo. Tarefas de aplicação individualmente ou em pares.

Momentos da aula	Tempo Previsto – Aula 90 minutos
(1) Entrada dos alunos. Ditado do sumário. Registo das faltas.	5min
(2) Apresentação da Tarefa "Derivando ponto a ponto"	5min
(3) Resolução da Tarefa "Derivando ponto a ponto"	15min
(4) Apresentação e discussão dos resultados da Tarefa	10min
(5) Sistematização das Aprendizagens	10min
(6) Determinação da função derivada da função polinomial $f(x) = ax^2$	10min
(7) Indicação das funções derivadas das funções afim, polinomiais de 2.º grau completas e polinomiais de 3.º grau	10min
(8) Resolução de exercícios do manual escolar	15min
(9) Apresentação das resoluções	8min
(10) Encerramento da aula	2min

Desenvolvimento da Aula
(1) Ditado do sumário e registo das presenças dos alunos.
(2) Apresentação da Tarefa "Derivando ponto a ponto" Os alunos serão informados sobre a organização da aula, nomeadamente no que se refere à metodologia de trabalho. A professora indicará que a forma como os alunos devem utilizar a calculadora gráfica estará especificada na tarefa. Apesar de a tarefa ser realizada em pares (ou grupos de 3 elementos), cada aluno receberá uma tarefa. Os alunos terão um breve momento para observar a tarefa e caso existam dúvidas generalizadas a professora deverá intervir de modo a que todos os alunos iniciem a tarefa nas mesmas condições.
(3) Resolução da Tarefa "Derivando ponto a ponto" Os alunos resolverão autonomamente a Tarefa "Derivando ponto a ponto". Ao longo de todo este momento a professora circulará pela sala de modo a apoiar, através do questionamento, os alunos com eventuais dificuldades. De uma forma geral as três primeiras questões da tarefa não deverão implicar muitas dúvidas e/ou dificuldades uma vez que são bastante percetíveis e diretas. No entanto, os alunos poderão mostrar algumas dificuldades no trabalho com a calculadora gráfica. Neste caso a professora deverá encaminhá-los para a explicação apresentada na tarefa e, caso persistam as dificuldades, auxiliar os alunos no manuseamento do recurso. A última questão, 1.(d) poderá levantar algumas dúvidas uma vez que é uma questão mais aberta a que os alunos não estão tão acostumados. Deste modo, caso surjam dúvidas nesta alínea, a professora deverá questionar os alunos acerca da relação entre os valores de x e o declive da reta tangente com os quais preencheram a tabela da alínea anterior. Caso os alunos tenham dificuldades em perceber que o declive da reta tangente num determinado ponto de abcissa x é o dobro de x a professora deverá encaminhar os alunos para a observação da tabela anterior colocando questões acerca da relação entre os valores encontrados. Se durante este momento a professora se aperceber de dúvidas ou dificuldades generalizadas

	deverá interromper a aula e fazer uma explicação para toda a turma.
(4)	Apresentação e discussão dos resultados da Tarefa Os alunos apresentarão no quadro as resoluções das questões 1.(c) e 1.(d), que serão discutidas com a turma caso existam dúvidas ou resoluções diferentes. Tendo em conta que na questão 1.(c) os valores de x (e o declive da respetiva reta tangente) poderão diferir de grupo para grupo, a professora deverá alertar os alunos para esse facto e explicar-lhes que o importante é que a relação estabelecida entre os valores seja a mesma. Caso algum grupo tenha conjeturado uma relação diferente e, mesmo com apresentação no quadro, continue com dúvidas, deverá colocar as suas questões de modo a ficar esclarecido. No caso da questão 1.(d), se existirem diferentes conjeturas que a professora considere que devem ser discutidas com toda a turma, os respetivos grupos apresentarão as suas conjeturas, justificando-as perante os colegas que poderão colocar questões se sentirem essa necessidade. O papel da professora será o de mediadora de aprendizagens e gestora das interações, proporcionando um papel central aos alunos. No entanto, caso existam dúvidas generalizadas deverá intervir cuidando que toda a turma realize aprendizagens significativas. Além disso, no final da apresentação de cada questão deverá questionar a turma sobre eventuais dúvidas e particularmente na última questão deverá assegurar-se que todos os alunos compreenderam a relação entre o valor da abcissa x de cada ponto e o valor do declive da reta tangente ao gráfico da função nesse ponto e escreveram corretamente a expressão que representa essa relação.
(5)	Sistematização das aprendizagens A professora, tendo em conta o que foi feito na última alínea da tarefa, deverá enfatizar que uma vez que a cada valor x pertencente ao domínio de uma função f corresponde o valor da derivada em x então a própria derivada é uma função. Será projetado um quadro referente à definição de derivada enquanto função que os alunos deverão registar no seu caderno diário. Caso os alunos tenham dúvidas neste momento a professora fará uma explicação para a turma.
(6)	Determinação da função derivada da função polinomial $f(x) = ax^2$ A professora, tendo em conta que o conceito de função derivada foi introduzido através da função x^2, fará a demonstração, através da definição, da derivada de uma função $f(x) = ax^2$. Durante este momento a professora estará em interação com os alunos, questionando-os ao longo da demonstração. Os alunos deverão registar esta demonstração no seu caderno diário. Se durante este momento a professora se aperceber de dúvidas generalizadas deverá interromper a aula e fazer uma explicação para toda a turma.
(7)	Indicação das funções derivadas das funções afim, polinomiais de 2.º grau completas e polinomiais de 3.º grau A professora indicará que, de modo semelhante ao que foi feito anteriormente, é possível determinar a derivada de vários tipos de funções nomeadamente da função afim. Deste modo, fará uma breve explicação sobre a origem da derivada deste tipo de funções e, em particular, da função constante, sendo que posteriormente os alunos deverão registar no seu caderno o quadro da página 72 do manual escolar. Tendo em conta que no momento anterior foi feita a demonstração apenas para a função ax^2, a professora generalizará a função derivada para as funções polinomiais de 2.º grau completas. Esta generalização será feita em interação com os alunos e a professora deverá relacionar esta derivada com as determinadas anteriormente, introduzindo, ainda que intuitivamente, a ideia de derivada de soma de funções. Em seguida os alunos deverão registar os quadros das páginas 74 e 75. Também através de uma breve explicação sobre a sua origem, a professora indicará a função derivada de uma função polinomial de 3.º grau e os alunos deverão registar no seu caderno os quadros da página 76 do manual.

Se durante este momento a professora se aperceber de dúvidas generalizadas deverá interromper a aula e fazer uma explicação para toda a turma.
(8) Resolução de exercícios do manual escolar Os alunos resolverão autonomamente as alíneas 48.1, 48.4, 57.1, 57.4, 58.1 e 58.5 respetivamente das páginas 72, 75 e 76. Ao longo de todo este momento a professora circulará pela sala de modo a apoiar, através do questionamento, os alunos com eventuais dificuldades. De uma forma geral, são exercícios bastante simples de aplicação, no entanto, caso existam dúvidas, a professora deverá encaminhar os alunos para as funções derivadas que registaram anteriormente.
(9) Apresentação das resoluções Alguns alunos irão ao quadro apresentar as suas resoluções. Caso existam dúvidas, o aluno que estiver no quadro deverá explicar aos colegas a sua resolução e se mesmo assim as dúvidas persistirem a aula será interrompida e a professora fará uma explicação para a turma.
(10) Encerramento da aula Os alunos serão informados do trabalho de casa.

Comentário
Tendo em conta o ritmo de trabalho heterogéneo da turma serão propostas como extra as alíneas restantes dos exercícios já resolvidos em aula. O exercício 56 da página 75 será considerado trabalho de casa.

Anexo 1.5. Planificação 5.ª aula

Aula de 4 de março de 2015 – Plano de Aula

Matemática	Introdução ao Cálculo Diferencial I	Ano/Turma: 11º[redacted]

Sumário
Derivada da função $\frac{1}{x}$. Generalização da derivada de funções racionais do tipo $a+\frac{b}{x-c}$. Esclarecimento de dúvidas para a ficha de avaliação. Resolução de exercícios do manual escolar.

Objetivos
Calcular a derivada de funções racionais. Consolidar conceitos abordados nas aulas anteriores.

Recursos			
Professor	Manual escolar Projetor Computador Portátil	Aluno	Manual escolar

Principais Tópicos e conceitos envolvidos	Capacidades Transversais
Derivadas de algumas funções: função racional do 1.º grau	Comunicação Matemática Raciocínio Matemático

Metodologia de trabalho
Trabalho autónomo dos alunos na determinação da derivada da função $\frac{1}{x}$. Generalização da derivada de funções racionais do tipo $a+\frac{b}{x-c}$, em grande grupo. Trabalho autónomo dos alunos na resolução de exercícios do manual escolar referentes à derivada de funções

racionais. De forma autónoma os alunos esclarecerão dúvidas para a ficha de avaliação ou resolverão exercícios sobre os conceitos abordados nas aulas anteriores.

Momentos da aula	Tempo Previsto – Aula 90 minutos
(1) Entrada dos alunos. Ditado do sumário. Registo das faltas.	5min
(2) Determinação da função derivada da função $\frac{1}{x}$	15min
(3) Generalização da derivada de funções racionais do tipo $a+\frac{b}{x-c}$	10min
(4) Resolução de exercícios do manual e apresentação dos resultados	13min
(5) Esclarecimento de dúvidas para a ficha de avaliação/Resolução de exercícios	45min
(6) Encerramento da aula	2min

Desenvolvimento da Aula
(1) Ditado do sumário e registo das presenças dos alunos.
(2) Determinação da derivada da função $\frac{1}{x}$ Neste momento a professora escreverá no quadro a função $f(x)=\frac{1}{x}$ e indicará aos alunos que deverão determinar individualmente (ou em pares) a derivada desta função utilizando a definição de derivada. Ao longo de todo este momento a professora circulará pela sala de modo a apoiar, através do questionamento, os alunos com eventuais dificuldades. Caso os alunos evidenciem dificuldades em recordar a definição, a professora deverá questioná-los acerca do que foi feito na aula anterior e encaminhá-los para os seus registos no caderno diário. Se os alunos revelarem dificuldades nos cálculos, a professora deverá, mais uma vez, relembrar-lhes o que foi feito nas aulas anteriores. Se durante este momento a professora se aperceber de dúvidas ou dificuldades generalizadas deverá interromper a aula e fazer uma explicação para toda a turma. Depois deste momento de trabalho autónomo, um aluno irá ao quadro apresentar a sua resolução que deverá explicar aos colegas, caso existam dúvidas. Se mesmo assim as dúvidas persistirem a aula será interrompida e a professora fará uma explicação para a turma.
(3) Generalização da derivada de funções racionais do tipo $a+\frac{b}{x-c}$ Tendo em conta a derivada da função $\frac{1}{x}$ determinada no momento anterior, a professora, em interação com a turma, generalizará a derivada das funções do tipo $\frac{b}{x}$ para $b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Os alunos deverão registar a derivada deste tipo de funções no seu caderno diário e posteriormente a professora generalizará a derivada para funções do tipo $a+\frac{b}{x-c}$, para $a, c \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Os alunos deverão, mais uma vez, registar esta derivada e será feito um exemplo no quadro que estes também deverão registar. Se durante este momento a professora se aperceber de dúvidas ou dificuldades generalizadas deverá interromper a aula e fazer uma explicação para toda a turma.
(4) Resolução de exercícios do manual e apresentação dos resultados Os alunos resolverão autonomamente as alíneas 62.1. e 62.6 do exercício 62 e o exercício 63 da página 79 do manual escolar.

Ao longo de todo este momento a professora circulará pela sala de modo a apoiar, através do questionamento, os alunos com eventuais dificuldades. Caso os alunos mostrem dificuldades na determinação das derivadas de funções racionais, a professora deverá relembrar o que foi feito anteriormente e indicar aos alunos que devem consultar as páginas 78 e 79 do manual escolar. No exercício 63.1 se os alunos evidenciarem dificuldade em mostrar a igualdade pretendida a professora deverá questioná-los acerca do algoritmo da divisão que utilizaram para funções racionais desde o início do período. Se durante este momento a professora se aperceber de dúvidas ou dificuldades generalizadas deverá interromper a aula e fazer uma explicação para toda a turma.

Depois deste momento de trabalho autónomo, alguns alunos irão ao quadro apresentar as suas resoluções que deverão explicar aos colegas, caso existam dúvidas. Se mesmo assim as dúvidas persistirem a aula será interrompida e a professora fará uma explicação para a turma.

(5) Esclarecimento de dúvidas para a ficha de avaliação/Resolução de exercícios

Uma vez que na aula seguinte os alunos realizarão uma ficha de avaliação, esta segunda metade da aula será dedicada ao esclarecimento de eventuais dúvidas que os alunos possam ter relativamente aos tópicos abordados ao longo de todo o ano letivo.

Os alunos que não pretendam esclarecer dúvidas deverão realizar alguns exercícios que englobem os conceitos lecionados até ao momento na unidade de ensino, nomeadamente os exercícios referentes à determinação de derivadas de algumas funções.

Neste momento a professora circulará pela sala de modo a apoiar os alunos em eventuais dúvidas, independentemente da opção destes.

(6) Encerramento da aula

Os alunos serão informados que caso tenham dúvidas para a ficha de avaliação poderão contactar a professora por via eletrónica.

Comentário
Caso existam alunos que já tenham resolvido os exercícios do manual referentes aos tópicos lecionados até ao momento na unidade de ensino, a professora indicará que poderão resolver as questões 1. a 5. das páginas 130 e 131 e as propostas 3,5,6,7,8 e 9 das páginas 136 e 137 do manual escolar.

Anexo 1.6. Planificação 6.ª aula

Aula de 6 de março de 2015 – Plano de Aula

Matemática	Introdução ao Cálculo Diferencial I	Ano/Turma: 11º[redacted]

Sumário
Ficha de avaliação sumativa.

Objetivos
Consolidar os tópicos lecionados ao longo do ano letivo.

Recursos			
Professor	Ficha de avaliação sumativa	Aluno	Ficha de avaliação sumativa Calculadora gráfica

Principais Tópicos e conceitos envolvidos	**Capacidades Transversais**
Estudo intuitivo das propriedades das funções e dos seus gráficos para a seguinte classe de funções: $a + \frac{b}{cx+d}$ Conceito intuitivo de limite, de $+\infty$ e $-\infty$ Noção de taxa média de variação; cálculo da taxa média de variação. Interpretação de taxa média de variação. Noção de taxa de variação. Interpretação geométrica de taxa de variação. Definição de derivada. Resolução de problemas que envolvam triângulos	Comunicação Matemática Raciocínio Matemático

Função seno, cosseno e tangente Produto escalar de dois vetores no plano e no espaço Paralelismo e perpendicularidade de retas e planos Perpendicularidade de vetores e de retas	

Metodologia de trabalho
Trabalho autónomo dos alunos na resolução da ficha de avaliação sumativa.

Momentos da aula	**Tempo Previsto – Aula 90 minutos**
(1) Entrada dos alunos. Ditado do sumário. Registo das faltas.	5min
(2) Realização de uma ficha de avaliação sumativa	83min
(3) Encerramento da aula	2min

Desenvolvimento da Aula
(1) Ditado do sumário e registo das presenças dos alunos.
(2) Realização de uma ficha de avaliação sumativa Os alunos realizarão autonomamente uma ficha de avaliação sumativa relativa aos conteúdos abordados ao longo do ano letivo.
(3) Encerramento da aula

Anexo 1.7. Planificação 7.ª aula

Aula de 9 de março de 2015 – Plano de Aula

Matemática	Introdução ao Cálculo Diferencial I	Ano/Turma: 11º[redacted]

Sumário
Derivada da função módulo. Resolução de uma ficha de trabalho.

Objetivos
Calcular a derivada da função módulo. Consolidar os conceitos abordados nas aulas anteriores.

Recursos			
Professor	Manual escolar Ficha de Trabalho n.º 1 Ficha Síntese sobre derivadas Projetor Computador Portátil	Aluno	Manual escolar Ficha de Trabalho n.º 1 Ficha Síntese sobre derivadas

Principais Tópicos e conceitos envolvidos	**Capacidades Transversais**
Derivadas de algumas funções: função módulo.	Comunicação Matemática Raciocínio Matemático

Metodologia de trabalho
Trabalho autónomo dos alunos, na resolução da ficha de trabalho. Determinação da derivada da função módulo, em grande grupo.

Momentos da aula	Tempo Previsto – Aula 90 minutos
(1) Entrada dos alunos. Ditado do sumário. Registo das faltas.	5min
(2) Resolução das questões 1 a 7 da Ficha de Trabalho n.º1 e apresentação dos resultados	45min
(3) Determinação da derivada da função módulo	20min
(4) Resolução da questão 8 da Ficha de Trabalho n.º1 e apresentação dos resultados	18min
(5) Encerramento da aula	2min

Desenvolvimento da Aula
(1) Ditado do sumário e registo das presenças dos alunos.
(2) Resolução das questões 1 a 7 da Ficha de Trabalho n.º1 e apresentação dos resultados Os alunos realizarão autonomamente uma ficha de trabalho com o objetivo de consolidar os conceitos abordados nas aulas anteriores. Ao longo de todo este momento a professora circulará pela sala de modo a apoiar, através do questionamento, os alunos com eventuais dificuldades. De uma forma geral, tendo em conta que a maioria das questões da ficha tem por base a determinação de derivadas, os alunos poderão evidenciar algumas dificuldades na aplicação das regras de derivação já lecionadas. Deste modo, a professora deverá encaminhá-los para o quadro, onde serão projetadas as mesmas regras, ou para os seus próprios cadernos diários onde já as registaram. Na questão 1. os alunos poderão ter dificuldade em relacionar a equação da reta tangente e a definição de derivada. Neste caso, a professora deverá questioná-los acerca dos seus conhecimentos sobre a interpretação geométrica de derivada num ponto e a própria definição de derivada. Se mesmo assim as dúvidas persistirem, a professora deverá encaminhar os alunos para a página 63 do manual escolar. Algumas das questões da ficha têm como objetivo escrever a equação da reta tangente ao gráfico de uma função num determinado ponto, assim, caso os alunos evidenciem dificuldades na determinação da equação, o procedimento da professora será semelhante, questionando os alunos sobre a relação entre a reta tangente num determinado ponto e a derivada nesse ponto. Se mesmo assim as dúvidas persistirem, a professora deverá encaminhar os alunos para a página 63 do manual escolar e para algumas tarefas realizadas nas aulas anteriores. Se durante este momento a professora se aperceber de dúvidas ou dificuldades generalizadas deverá interromper a aula e fazer uma explicação para toda a turma. Tendo em conta a dimensão da ficha de trabalho, a professora selecionará as questões 1, 2.1, 2.4, 2.5, 3, 6 e 7 que os alunos deverão resolver em sala de aula, enquanto outras serão consideradas para trabalho autónomo dos alunos em casa. Depois deste momento de trabalho autónomo, alguns alunos irão ao quadro apresentar a resolução das questões que deverão explicar aos colegas, caso existam dúvidas. Se mesmo assim as dúvidas persistirem a aula será interrompida e a professora fará uma explicação para a turma.
(3) Determinação da derivada da função módulo A professora projetará um ficheiro dinâmico de GeoGebra onde está representada a função x^2 e as sucessivas retas tangentes ao gráfico da função nos pontos do seu domínio. Em seguida será mostrado um ficheiro onde a função derivada é construída a partir das sucessivas retas tangentes vistas anteriormente. A professora deverá enfatizar a relação entre o declive da reta tangente ao gráfico de uma função num ponto e a derivada da função nesse ponto, reforçando assim, a interpretação geométrica de derivada de uma função. Posteriormente, a professora projetará um ficheiro onde está representada a função $\|x\|$ e as sucessivas retas tangentes nos pontos do seu domínio. A professora deverá chamar a atenção para o facto de no ponto de abcissa 0 não existir reta tangente ao gráfico da função. Com um

	ficheiro onde é construída a derivada da função a partir das sucessivas retas tangentes ao gráfico da função, a professora deverá explicar aos alunos que como não existe reta tangente ao gráfico no ponto $x = 0$ não existe derivada da função em $x = 0$. Em interação com os alunos, a professora deverá relembrar a expressão da função módulo por ramos e determinar a derivada de $f(x) = \|x\|$ afirmando que não existe derivada para $x = 0$, ou seja, que este ponto não pertence ao domínio da função derivada. Os alunos deverão registar no seu caderno diário a função módulo (definida com e sem o sinal de módulo), a sua função derivada e a representação gráfica da última. De modo a consolidar as aprendizagens realizadas, a professora, mais uma vez através de um ficheiro dinâmico de GeoGebra, mostrará outro exemplo de uma função com "pontos angulosos" onde, tal como anteriormente, serão construídas as sucessivas retas tangentes ao gráfico da função nos pontos do seu domínio. Será também projetado um ficheiro onde será construída a função derivada através das sucessivas retas tangentes. Através da visualização destes ficheiros será explorada com os alunos a ideia intuitiva de pontos onde não existe derivada de uma função. No final deste momento, tendo em conta que todas as funções derivadas contempladas no Programa de Matemática A do 11.º ano já foram apresentadas aos alunos, a professora entregará uma ficha resumo com as regras de derivação e alguns exemplos.
(4)	Resolução da questão 8 da Ficha de Trabalho n.º 1 e apresentação dos resultados Os alunos resolverão autonomamente a questão 8 da ficha de trabalho. Antes de os alunos iniciarem a resolução, a professora deverá introduzir a definição de função diferenciável, relacionando com o que foi feito anteriormente. Ao longo de todo este momento a professora circulará pela sala de modo a apoiar, através do questionamento, os alunos com eventuais dificuldades. Dado que esta é a primeira vez que os alunos contactam com funções sem derivada em determinados pontos e uma vez que não têm nenhum processo analítico para provar se determinado ponto tem ou não derivada, será expectável que mostrem algumas dificuldades nesta questão. Neste caso, a professora deverá questioná-los acerca do que acabou de ser mostrado e da explicação dada, encaminhando-os para a ideia intuitiva de "pontos angulosos". Caso os alunos persistam com muitas dificuldades a professora deverá enfatizar o facto de as funções polinomiais admitirem derivada em todos os pontos do seu domínio, ao contrário de outras funções "menos regulares". No caso da questão 8.2, mesmo que os alunos já tenham conseguido determinar quais as funções diferenciáveis poderão mostram dificuldades em determinar o valor da derivada no ponto de abcissa indicado. Neste caso, a professora deverá questionar os alunos acerca da relação entre a reta tangente ao gráfico de uma função num determinado ponto e a derivada nesse ponto, relembrando-lhes a interpretação geométrica de derivada. Se durante este momento a professora se aperceber de dúvidas ou dificuldades generalizadas deverá interromper a aula e fazer uma explicação para toda a turma. Após o trabalho autónomo, alguns alunos irão ao quadro apresentar a resolução da questão 8. que deverão explicar aos colegas. Além disso, no final da apresentação a professora deverá questionar a turma sobre eventuais dúvidas procurando assegurar-se que todos os alunos compreenderam a definição de função diferenciável e a existência ou não de derivada da função em determinados pontos.
(5)	Encerramento da aula Os alunos serão informados do trabalho de casa.

Comentário
Tendo em conta o ritmo de trabalho heterogéneo da turma serão propostos como extra todas as questões da ficha de trabalho não resolvidas em aula e o exercício 66 da página 81 do manual escolar. Os exercícios 65 e 66.1 da página 81 do manual escolar serão considerados trabalho de casa.

NOME: ____ TURMA _____

Derivada da Função Afim

Se $f(x) = mx + b$ então $f'(x) = m$

Nota: A derivada da função constante é zero, ou seja, se $f(x) = c$ então $f'(x) = 0$

Exemplo:

- Se $f(x) = 2x + 3$ então $f'(x) = 2$.
- Se $f(x) = 4$ então $f'(x) = 0$

Derivada da função polinomial de 2º grau

Se $f(x) = ax^2 + bx + c$, então $f'(x) = 2ax + b$

Exemplo:

- Se $f(x) = 4x^2$ então $f'(x) = (2 \times 4)x = 8x$.
- Se $f(x) = 3x^2 + 5x + 6$ então $f'(x) = (2 \times 3)x + 5 = 6x + 5$.

Derivada da função polinomial de 3º grau

Se $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, então $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

Exemplo:

- Se $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + x + 8$ então $f'(x) = (3 \times 2)x^2 + (2 \times 3)x + 1$

Derivada de funções racionais

(i) Se $f(x) = \frac{b}{x}$ então $f'(x) = -\frac{b}{x^2}$

(ii) Se $f(x) = \frac{b}{x-c}$ então $f'(x) = -\frac{b}{(x-c)^2}$

(iii) Se $f(x) = a + \frac{b}{x-c}$ então $f'(x) = -\frac{b}{(x-c)^2}$

Exemplo:

- Se $f(x) = \frac{3}{x}$ então $f'(x) = -\frac{3}{x^2}$
- Se $f(x) = \frac{3}{x-2}$ então $f'(x) = -\frac{3}{(x-2)^2}$
- Se $f(x) = 4 + \frac{3}{x-2}$ então $f'(x) = -\frac{3}{(x-2)^2}$

Derivada da função módulo

Se $f(x) = |ax - b|$ então $f'(x) = \begin{cases} a \; se \; x > \frac{b}{a} \\ -a \; se \; x < \frac{b}{a} \end{cases}$

Em $x = \frac{b}{a}$ não existe derivada.

<u>Exemplo</u>:

- Se $f(x) = |x|$ então $f'(x) = \begin{cases} 1 \; se \; x > 0 \\ -1 \; se \; x < 0 \end{cases}$

  Em $x = 0$ não existe derivada

- Se $f(x) = |2x|$ então $f'(x) = \begin{cases} 2 \; se \; x > 0 \\ -2 \; se \; x < 0 \end{cases}$

  Em $x = 0$ não existe derivada

- Se $f(x) = |5x - 3|$ então $f'(x) = \begin{cases} 5 \; se \; x > \frac{3}{5} \\ -5 \; se \; x < \frac{3}{5} \end{cases}$

  Em $x = \frac{3}{5}$ não existe derivada.

Anexo 1.8. Planificação 8.ª aula

Aula de 11 de março de 2015 – Plano de Aula

Matemática	Introdução ao Cálculo Diferencial I	Ano/Turma: 11º[redacted]

Sumário
Sinal da função derivada, sentido de variação e extremos relativos de uma função: tarefa de exploração. Resolução de exercícios do manual escolar.

Objetivos
Compreender a relação entre o sinal da função derivada e o sentido de variação e extremos relativos de uma função.

Recursos			
Professor	Manual escolar Tarefa "Evolução das bactérias" Projetor Computador Portátil	Aluno	Manual escolar Tarefa "Evolução das bactérias"

Principais Tópicos e conceitos envolvidos	Capacidades Transversais
Constatação por argumentos geométricos de que: *i)* se a derivada é positiva num intervalo aberto a função é crescente nesse intervalo e, se a derivada é negativa num intervalo aberto a função é decrescente nesse intervalo; *ii)* se a função é derivável num intervalo aberto e se tem um extremo relativo num ponto desse intervalo então a derivada é nula nesse ponto.	Comunicação Matemática Raciocínio Matemático

Metodologia de trabalho
Trabalho autónomo dos alunos, em pares, na resolução da tarefa de exploração “Evolução das bactérias”. Discussão e sistematização dos resultados em grande grupo. Trabalho autónomo dos alunos na resolução de exercícios do manual escolar.

Momentos da aula	Tempo Previsto – Aula 90 minutos
(1) Entrada dos alunos. Ditado do sumário. Registo das faltas.	5min
(2) Resolução da tarefa “Evolução das bactérias”	20min
(3) Apresentação e discussão dos resultados	10min
(4) Sistematização das aprendizagens	33min
(5) Resolução de exercícios do manual e apresentação dos resultados	20min
(6) Encerramento da aula	2min

Desenvolvimento da Aula
(1) Ditado do sumário e registo das presenças dos alunos.
(2) Resolução da tarefa “Evolução das bactérias” Os alunos resolverão autonomamente a Tarefa “Evolução das bactérias”. Ao longo de todo este momento a professora circulará pela sala de modo a apoiar, através do questionamento, os alunos com eventuais dificuldades. De uma forma geral os alunos poderão evidenciar dificuldades no preenchimento da tabela da questão 1 no que se refere ao sinal do declive da reta tangente em pontos de abcissas pertencentes ao intervalo. Neste caso, a professora deverá questioná-los acerca dos seus conhecimentos sobre declives de retas e caso seja necessário indicar-lhes que podem desenhar a reta em questão. Se mesmo assim os alunos continuarem com dúvidas no sinal do declive, a professora deverá relembrar-lhes de que forma se verifica o sinal do declive de uma determinada reta. Alguns alunos poderão também mostrar dificuldades em determinar o sinal da derivada sendo que, se tal ocorrer, a professora os questionará acerca da relação entre o declive da reta tangente em pontos de abcissas pertencentes ao intervalo e a derivada, relação esta que eles têm trabalhado ao longo das últimas aulas. Caso os alunos não consigam concluir esta relação, a professora deverá encaminhá-los para a página 63 do manual. Na questão 2. os alunos poderão demonstrar dificuldades na determinação do valor da derivada nos pontos de abcissa indicados. Neste caso a professora deverá, mais uma vez, questioná-los acerca da relação entre a derivada num ponto e o declive da reta tangente ao gráfico da função nesse mesmo ponto. Se mesmo assim os alunos persistirem com dúvidas a professora deverá relembrar a interpretação geométrica de derivada. Caso os alunos, mesmo que não mostrem dificuldades na interpretação geométrica da derivada, tenham dúvidas em determinar a reta tangente aos pontos pretendidos, a professora deverá apoiá-los encaminhando-os para a reta pretendida. Na questão 3., genericamente, não se esperam muitas dificuldades, no entanto, caso os alunos não se recordem das regras de derivação a professora deverá encaminhá-los para a ficha síntese entregue na aula anterior. Relativamente ao estudo analítico do sinal da função derivada, os alunos poderão ter dúvidas sobre o procedimento a adotar e neste caso a professora deverá questioná-los acerca de outros exercícios onde já estudaram (desde o 10.º ano) o sinal de

funções. Se mesmo assim os alunos não compreenderem que devem determinar os zeros da função derivada, a professora deverá remetê-los para este procedimento.
A questão 4., apesar de ser uma questão mais aberta, não deverá conter grandes dificuldades uma vez que os alunos já realizaram várias questões deste tipo ao longo da unidade de ensino. No entanto, caso os alunos revelem dificuldades em relacionar a monotonia da função com o sinal da derivada, a professora deverá questioná-los sobre a tabela que preencheram na questão 1. e encaminhá-los para a visualização do gráfico.
Na última questão espera-se que os alunos concluam facilmente a relação pretendida uma vez que a representação gráfica do início da tarefa é bastante facilitadora. No entanto caso os alunos não relacionem o estudo analítico com a representação gráfica, a professora deverá encaminhá-los nesse sentido, questionando-os acerca dos extremos da função, dos zeros da derivada e da relação entre estes.

Se durante este momento a professora se aperceber de dúvidas ou dificuldades generalizadas deverá interromper a aula e fazer uma explicação para toda a turma.

(3) Apresentação e discussão dos resultados

Os alunos apresentarão no quadro as suas resoluções, que serão discutidas com a turma caso existam dúvidas ou resoluções diferentes.
No caso das questões 4. e 5. se existirem diferentes conjeturas que a professora considere que devem ser discutidas com toda a turma, os respetivos alunos apresentarão as suas conjeturas, justificando-as perante os colegas que poderão colocar questões se sentirem essa necessidade.

O papel da professora será o de mediadora de aprendizagens e gestora das interações, proporcionando um papel central aos alunos. No entanto, caso existam dúvidas generalizadas deverá intervir cuidando que toda a turma realize aprendizagens significativas. Além disso, no final da apresentação de cada questão deverá questionar a turma sobre eventuais dúvidas e, particularmente nas últimas questões, deverá assegurar-se que todos os alunos compreenderam a relação entre a monotonia da função e o sinal da derivada bem como entre os extremos da função e os zeros da derivada.

(4) Sistematização das aprendizagens

A professora fará uma sistematização dos conceitos abordados na tarefa anterior.
Em primeiro lugar, tendo em conta as conjeturas que os alunos fizeram na questão 4, a professora sistematizará a relação entre o sinal da derivada e a monotonia da função. Assim, em interação com os alunos, estabelecer-se-á a seguinte relação: se a derivada de uma função f é positiva para um intervalo, então f é estritamente crescente nesse intervalo; se a derivada é negativa para um intervalo, a função f é estritamente decrescente nesse intervalo e, finalmente, se a derivada é zero para um intervalo então a função f é constante nesse intervalo. Será projetado um quadro com estas informações que os alunos deverão registar e a professora deverá indicar-lhes que esta sistematização se encontra feita com exemplos na página 83 do manual escolar.
Seguidamente serão abordadas as conjeturas da questão 5. que relaciona os zeros da derivada e os extremos da função. Uma vez que esta relação é extremamente delicada e exige uma série de cuidados e restrições, a professora fará alguns exemplos de modo a proporcionar aos alunos aprendizagens tão significativas quanto possível. Assim, tendo em conta a relação estabelecida na tarefa anterior, é de esperar que os alunos afirmem que os zeros da derivada são os extremos da função. A professora deverá chamar-lhes a atenção para a veracidade desta afirmação no caso particular da função utilizada na tarefa mas ressalvar que nem sempre isso acontece. Deste modo, a professora projetará a representação gráfica da função $|x|$, onde os alunos podem observar a existência de um mínimo para $x = 0$. Em seguida, relembrando o que foi feito numa das aulas anteriores será projetada a derivada desta função para que os alunos compreendam que $x = 0$ não é zero da derivada e que, em particular, não existe derivada nesse ponto. A professora deverá enfatizar a ideia de que, apesar de não ser um zero da derivada, em $x = 0$ a função muda de sinal, existindo portanto um extremo em $x = 0$, para a função $|x|$.
Após este exemplo, a professora projetará a representação gráfica da função x^3 e, em interação

com os alunos, determinará a sua derivada. A representação gráfica da mesma será também projetada de modo a que os alunos possam estudar o seu sinal. Assim, a professora deverá chamar-lhes a atenção para o facto de a derivada ter um zero duplo (para $x = 0$) e, no entanto, não mudar de sinal. Relacionando com a função x^3, através da representação gráfica, a professora encaminhará os alunos para o facto de, apesar de $x = 0$ ser zero da função derivada, a função x^3 não ter nenhum extremo para $x = 0$. Em interação com os alunos, a professora deverá concluir então que se uma função f é contínua para $x = a$ e a sua derivada muda de sinal no ponto de abcissa a, então a função f tem um extremo em $x = a$. Será projetado um quadro com estas informações que os alunos deverão registar no seu caderno e a professora entregará uma ficha síntese onde constarão os exemplos dados e os quadro resumo.

Ao longo de todo este momento, caso os alunos evidenciem dúvidas deverão questionar a professora que fará uma explicação para a turma.

(5) Resolução de exercícios do manual e apresentação dos resultados

Os alunos resolverão autonomamente os exercícios 68, 69 e 73, respetivamente das páginas 83, 84 e 86 do manual escolar.
Ao longo de todo este momento a professora circulará pela sala de modo a apoiar, através do questionamento, os alunos com eventuais dificuldades. De uma forma geral os exercícios não deverão suscitar grandes dúvidas. No entanto, dado que será a primeira vez que os alunos aplicam diretamente a relação entre o sinal da função derivada e o sentido de variação e extremos relativos de uma função, estes poderão evidenciar algumas dificuldades, sendo que a professora deverá apoiá-los questionando-os acerca do que foi feito na tarefa anterior e na sistematização das aprendizagens. Caso as dificuldades permaneçam, a professora deverá relembrar-lhes a relação anteriormente abordada.

Depois deste momento de trabalho autónomo, alguns alunos irão ao quadro apresentar as suas resoluções que deverão explicar aos colegas, caso existam dúvidas. Se mesmo assim as dúvidas persistirem a aula será interrompida e a professora fará uma explicação para a turma.

(6) Encerramento da aula

Os alunos serão informados sobre o trabalho de casa.

Comentário
Tendo em conta o ritmo de trabalho heterogéneo da turma serão propostas como extra: - Proposta 15 da página 139 - Proposta 16 da página 139 Caso nem todos os exercícios propostos para a aula sejam realizados, serão considerados trabalho de casa.

NOME: ____ TURMA _____

Sinal da derivada e sentido de variação

Seja f uma função real de variável real e $]a, b[$ um intervalo contido no domínio de f.

Sabe-se que:

- Se $f'(x) > 0, \forall x \in]a, b[$, então f é estritamente crescente em $]a, b[$
- Se $f'(x) < 0, \forall x \in]a, b[$, então f é estritamente decrescente em $]a, b[$
- Se $f'(x) = 0, \forall x \in]a, b[$, então f é constante em $]a, b[$

Extremos relativos de uma função

Dada uma função, o estudo do sinal da derivada dessa função permite identificar, caso existam, os seus extremos relativos (máximos e mínimos).

Exemplo 1:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 5$$

Façamos o estudo do sinal da derivada da função f:

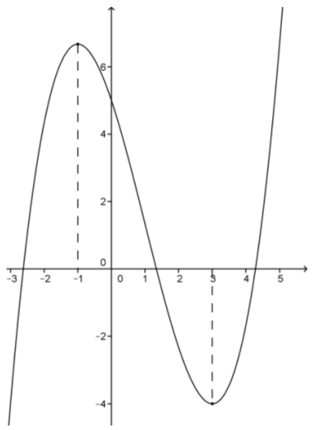
- Determinamos a derivada de f: $f'(x) = x^2 - 2x - 3$
- Calculamos os zeros da derivada: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 3$
- Preenchemos o quadro de sinal:

$\boldsymbol{x}$	$-\infty$	-1		3	$+\infty$
$\boldsymbol{f'}$	$+$	0	$-$	0	$+$
$\boldsymbol{f}$	$\nearrow$	$\frac{20}{3}$	$\searrow$	-4	$\nearrow$

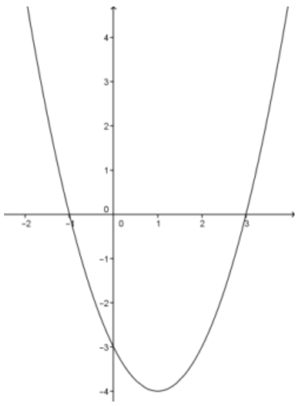
O estudo do sinal da derivada mostra que:

- f é estritamente crescente em $]-\infty, -1[$ e em $]3, +\infty[$ dado que a derivada é positiva nesses intervalos;
- f é estritamente decrescente em $]-1,3[$ dado que a derivada é negativa nesse intervalo;
- f tem um máximo relativo para $x = -1$ dado que a derivada passa de positiva a negativa e anula-se nesse ponto;
- f tem um mínimo relativo para $x = 3$ dado que a derivada passa de negativa a positiva e anula-se nesse ponto;

Estas características da função e da sua derivada podem ser observadas nas respetivas representações gráficas.



Representação gráfica de f



Representação gráfica de f'

> Em síntese:
> - $f'(-1) = 0$ e $f'(3) = 0$
> - Em $x = -1$, a derivada passa de positiva a negativa: $f(-1)$ é máximo relativo de f
> - Em $x = 3$, a derivada passa de negativa a positiva: $f(3)$ é mínimo relativo de f

Exemplo 2:

$$g(x) = |x|$$

Podemos escrever a função g da seguinte forma:

$$g(x) = \begin{cases} -x \ se \ x < 0 \\ 0 \ se \ x = 0 \\ x \ se \ x > 0 \end{cases}$$

Façamos o estudo do sinal da derivada da função g:

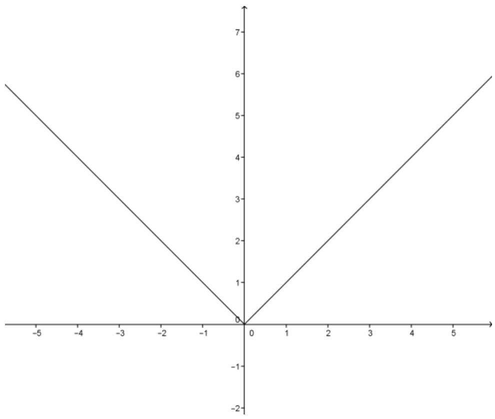
- Determinamos a derivada de g: $g'(x) = \begin{cases} -1 \ se \ x < 0 \\ 1 \ se \ x > 0 \end{cases}$
- Como podemos observar, a função derivada de g não tem zeros, no entanto muda de sinal
- Preenchemos o quadro de sinal:

$\boldsymbol{x}$	$-\infty$	0	$+\infty$
$\boldsymbol{g'}$	$-$	$n.d.$	$+$
$\boldsymbol{g}$	↘	0	↗

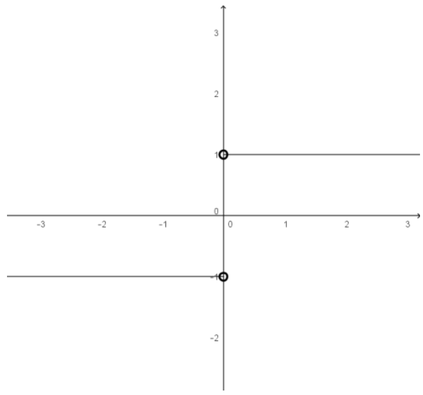
O estudo do sinal da derivada mostra que:

- g é estritamente decrescente em $]-\infty, 0[$ dado que a derivada é negativa nesse intervalo;
- g é estritamente crescente em $]0, +\infty[$ dado que a derivada é positiva nesse intervalo;
- g tem um mínimo relativo para $x = 0$ dado que a derivada passa de negativa a positiva (apesar de não estar definida nesse ponto).

Estas características da função e da sua derivada podem ser observadas nas respetivas representações gráficas.



Representação gráfica de g



Representação gráfica de g'

Em síntese:

- Em $x = 0$ não existe derivada
- Em $x = 0$, a derivada passa de negativa a positiva
- $g(0)$ é mínimo relativo da função

A função g' não tem zeros, no entanto muda de sinal em $x = 0$, logo a função g tem um extremo relativo para $x = 0$

Exemplo 3:

$$h(x) = x^3$$

Façamos o estudo do sinal da derivada da função h:

- Determinamos a derivada de h: $h'(x) = 3x^2$
- Calculamos os zeros da derivada: $h'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- Preenchemos o quadro de sinal:

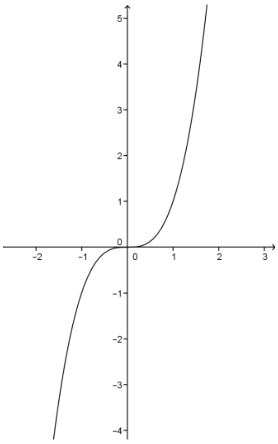
$\boldsymbol{x}$	$-\infty$	0	$+\infty$
$\boldsymbol{h'}$	$+$	0	$+$

h	↗	0	↗

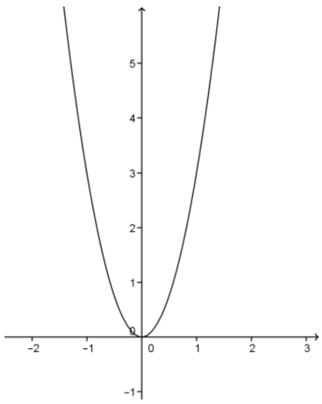
O estudo do sinal da derivada mostra que:

- h é estritamente crescente em $\mathbb{R}$ dado que a derivada é sempre positiva.
- h não tem máximos nem mínimos dado que a derivada nunca muda de sinal.

Estas características da função e da sua derivada podem ser observadas nas respetivas representações gráficas.



Representação gráfica de h



Representação gráfica de h'

Em síntese:

- $h'(0) = 0$
- Em $x = 0$, a derivada não muda de sinal (é sempre positiva)
- h não tem máximo nem mínimo

Apesar de h' ter um zero não muda de sinal, e portanto a função h não tem extremos.

Resumindo:

Seja f uma função real de variável real de domínio D e $a \in D$.

Se f é contínua em $x = a$ e a função derivada muda de sinal, então $f(a)$ é um extremo de f.

- $f(a)$ é **máximo relativo**, se a função derivada passa de positiva a negativa;
- $f(a)$ é **mínimo relativo**, se a função derivada passa de negativa a positiva.

Anexo 1.9. Planificação 9.ª aula

Aula de 13 de março de 2015 – Plano de Aula

Matemática	Introdução ao Cálculo Diferencial I	Ano/Turma: 11º[redacted]

Sumário
Resolução de tarefas sobre a relação entre o sinal da função derivada e sentido de variação e extremos relativos de uma função.

Objetivos
Consolidar a relação entre o sinal da função derivada e o sentido de variação e extremos relativos de uma função.

Recursos			
Professor	Manual escolar Ficha de Trabalho n.º 2 Projetor Computador Portátil	Aluno	Ficha de trabalho n.º 2 Manual escolar Calculadora gráfica

Principais Tópicos e conceitos envolvidos	Capacidades Transversais
Constatação por argumentos geométricos de que: *i)* se a derivada é positiva num intervalo aberto a função é crescente nesse intervalo e, se a derivada é negativa num intervalo aberto a função é decrescente nesse intervalo; *ii)* se a função é derivável num intervalo aberto e se tem um extremo relativo num ponto desse intervalo então a derivada é nula nesse ponto.	Comunicação Matemática Raciocínio Matemático Resolução de Problemas

Metodologia de trabalho
Trabalho autónomo dos alunos, individualmente ou em pares, na resolução das tarefas. Discussão dos resultados em grande grupo.

Momentos da aula	Tempo Previsto – Aula 90 minutos
(1) Entrada dos alunos. Ditado do sumário. Registo das faltas.	5min
(2) Correção do trabalho de casa	30min
(3) Resolução de tarefas de aplicação, apresentação e discussão dos resultados	53min
(4) Encerramento da aula	2min

Desenvolvimento da Aula
(1) Ditado do sumário e registo das presenças dos alunos.
(2) Correção do trabalho de casa Neste momento serão apresentadas as resoluções dos exercícios 69.2, 69.3 e 73, respetivamente, das páginas 84 e 86 do manual escolar. Cada alínea será apresentada por um aluno, que deverá indicar todos os cálculos e justificações bem como explicar a sua resolução à turma. Tendo em conta que estes exercícios são as primeiras aplicações da relação entre o sinal da função derivada, sentido de variação e extremos relativos de uma função, a professora deverá enfatizar a importância da mesma e os procedimentos envolvidos, fazendo uma síntese após cada resolução. Caso, ao longo deste momento, a professora se aperceba de dúvidas generalizadas na compreensão da relação entre o sinal da função derivada, sentido de variação e extremos relativos de uma função deverá interromper a aula e fazer uma explicação para toda a turma, relembrando o que foi feito na aula anterior. Após a apresentação das resoluções a professora deverá também recordar aos alunos que poderão consultar a ficha síntese entregue na aula anterior onde é feito um resumo alargado e com exemplos da relação estudada. Neste momento existirá também lugar para que os alunos tirem dúvidas relativamente a exercícios considerados trabalho de casa nas aulas anteriores, nomeadamente os exercícios 65 e 66 da página 81. Caso existam dúvidas generalizadas em algum dos conteúdos abordados nas últimas aulas, estas serão também esclarecidas neste momento.
(3) Resolução de tarefas de aplicação, apresentação e discussão dos resultados Os alunos resolverão autonomamente algumas tarefas do manual escolar bem como de uma ficha de trabalho que será entregue neste momento. Tendo em conta o tempo disponível, a professora indicará aos alunos quais as tarefas da ficha que deverão resolver. Neste caso, as tarefas a resolver serão 1.(a) e 1.(b), 2, 3, 4 da ficha de trabalho e a proposta 25 da página 142 do manual escolar. Ao longo de todo este momento a professora circulará pela sala de modo a apoiar, através do questionamento, os alunos com eventuais dificuldades. Na primeira questão, de uma forma geral, os alunos poderão evidenciar dificuldades nos procedimentos a realizar para estudar os intervalos de monotonia e os extremos de uma função. Neste caso, a professora deverá questioná-los acerca dos seus conhecimentos sobre a relação entre o sinal da função derivada, sentido de variação e extremos relativos de uma função, recordando o que foi feito durante a correção do trabalho de casa e na aula anterior. Caso as

dúvidas persistam a professora deverá encaminhar os alunos para a ficha síntese entregue na aula anterior, e/ou, se necessário, fazer uma breve explicação sobre a relação pretendida e os procedimentos envolvidos.
Relativamente às funções da questão 1., a primeira não deverá incorrer em grandes dificuldades, uma vez que a sua derivada é uma função quadrática com dois zeros, que corresponderão aos extremos da função. No caso da segunda questão, é expectável que os alunos demonstrem dificuldades, uma vez que, além de a função derivada ter uma restrição no domínio, não terá zeros. Assim, espera-se que os alunos tenham dúvidas na construção do quadro de sinal da derivada e na própria relação entre a derivada e a função. Neste caso, a professora deverá recordar a resolução do exercício 73.2 (corrigido anteriormente) ao mesmo tempo que deverá questionar os alunos sobre a conclusão que se pode estabelecer pelo facto de a derivada ser sempre negativa.

Na questão 2.(a) os alunos poderão revelar dificuldades em definir o perímetro da figura em função apenas do comprimento e da área da mesma. Neste caso, a professora deverá questioná-los acerca da expressão da área de um retângulo. Deverá também sugerir aos alunos que definam a largura em função do comprimento, usando o valor da área. Caso mesmo assim os alunos não consigam encontrar a expressão que define o perímetro da figura, a professora deverá questioná-los acerca dos seus conhecimentos sobre o perímetro de uma figura geométrica.
Na questão 2.(b) é expectável que os alunos demonstrem dificuldades dado que é a primeira vez que contactam com um problema de otimização no âmbito das derivadas. Deste modo, é de esperar que os alunos mostrem algumas dúvidas no início do problema, não sabendo como o resolver. Neste caso, a professora deverá estimular os alunos na resolução do problema remetendo para o contexto apresentado. Poderá também questioná-los sobre as várias formas que conhecem para determinar o valor mínimo de uma função.
Caso os alunos recorram à relação entre o sinal da função derivada, sentido de variação e extremos da função original para resolver o problema, poderão manifestar dificuldades na construção do quadro de sinal da derivada tendo em conta o contexto do problema. Neste caso a professora deverá questioná-los sobre o domínio da função derivada mas também sobre os valores que o comprimento x pode tomar. No final do problema a professora deverá relembrar-lhes o objetivo do mesmo, questionando-os sobre a resposta dada, sensibilizando-os para a necessidade de responderem à questão colocada de forma contextualizada. Se os alunos recorrerem à calculadora gráfica, a professora deverá dizer-lhes que devem reproduzir na sua folha o gráfico da função e os comandos que utilizaram na resolução.

Na questão 3 os alunos poderão revelar algumas dificuldades no que se refere à relação entre o sinal da função derivada e o sentido de variação de uma função, nomeadamente na sua representação gráfica. Neste caso, a professora deverá questionar os alunos acerca do sinal da função derivada em cada uma das figuras e a forma como este está ou não relacionado com a variação da função. Se os alunos continuarem com dúvidas a professora deverá encaminhá-los para a relação estudada na aula anterior. Além disso, os alunos poderão excluir facilmente a alínea (D) relembrando as regras de derivação, dado que a derivada de uma função afim é uma função constante, o que não acontece no caso desta figura.

Na questão 4. os alunos que optarem por resolver o problemas através da relação entre o sinal da função derivada, sentido de variação e extremos da função original poderão demonstrar algumas dificuldades no cálculo dos zeros, uma vez que a função não está escrita da forma que conhecem, sendo que o termo de maior grau não é o primeiro. Assim, é expectável que os alunos, ao utilizarem a fórmula resolvente confundam os valores de a, b e c o que levará a erros no cálculo dos zeros. Neste caso, a professora deverá questionar os alunos sobre os valores de a, b e c, nomeadamente sobre os sinais dos mesmos. Além disso, uma vez que a maioria dos alunos opta por calcular os zeros manualmente (ao invés de aplicar a fórmula resolvente na calculadora gráfica) espera-se que, dado que os valores de a e b são números decimais, existam erros nos cálculos. Mais uma vez, a professora deverá questionar os alunos sobre os valores em questão e sobre eventuais erros de cálculo.

Relativamente ao contexto do problema os alunos poderão evidenciar dificuldades em interpretar o valor de t, e responder de forma contextualizada à questão. Neste caso, a professora deverá interpelá-los sobre o contexto do problema e sobre o objetivo da questão, nomeadamente sobre a resposta pretendida, ou seja, se o problema questiona acerca da percentagem de doentes ou sobre o dia em que se verificou a percentagem máxima de doentes.
Na questão 1. da proposta 25 da página 142 do manual escolar os alunos poderão ter algumas dificuldades em determinar as coordenadas do ponto médio de A e B caso não reconheçam de imediato que os pontos A e B pertencem à reta e são respetivamente da forma $(x, 0)$ e $(0, y)$. Neste caso a professora deverá questioná-los acerca das coordenadas destes pontos e da sua posição nos eixos coordenados. Além disso, mesmo que determinem facilmente as coordenadas de A e B, os alunos poderão não recordar a forma de encontrar o ponto médio, pelo que, nesse caso, a professora deverá recordá-los da mesma. Após encontrarem as coordenadas do ponto P, os alunos poderão manifestar dificuldades em determinar a base do triângulo, pelo que a professora os deverá questionar acerca da relação entre a abcissa do ponto P e do ponto C.
Dado que a questão 2. é um problema de otimização a professora deverá atuar de forma semelhante aos problemas propostos na ficha de trabalho anterior. No entanto, uma vez que o problema não está totalmente equacionado, se os alunos tiverem dificuldades em encontrar a expressão que indica a área do triângulo, a professora deverá questioná-los acerca da relação entre o ponto P e o triângulo, encaminhando-os para a determinação da base e da altura do mesmo, em função de P.

Se durante a resolução das várias tarefas a professora se aperceber de dúvidas ou dificuldades generalizadas deverá interromper a aula e fazer uma explicação para toda a turma.

Durante o trabalho autónomo dos alunos, existirão momentos de apresentação/discussão de resultados.
No caso das questões 1. e 3. cada alínea será apresentada por um aluno que deverá indicar todos os cálculos e justificações bem como explicar aos colegas a sua resolução. A professora, caso existam dúvidas, deverá fazer uma explicação para a turma.
Nas questões 2. e 4. da ficha e proposta 25 da página 142 do manual escolar, caso existam várias estratégias de resolução para os problemas de otimização poderão ser apresentadas várias resoluções representativas destas mesmas estratégias. Os alunos que apresentarem as suas resoluções deverão explicar aos colegas o seu raciocínio e apresentar todas as justificações necessárias. No final das apresentações dos problemas, a professora deverá discutir com a turma a eficácia das várias estratégias e fazer uma explicação para a turma, no caso de existirem dúvidas.

(4) Encerramento da aula
Os alunos serão informados do trabalho de casa.

Comentário

Tendo em conta o ritmo de trabalho heterogéneo da turma serão propostos como extra:

- Proposta 8 da página 132

- Exercício 70 da página 84

Caso alguma questão da ficha não seja realizada em aula, será considerada trabalho de casa.

Anexo 1.10. Planificação 10.ª aula

Aula de 16 de março de 2015 – Plano de Aula

Matemática	Introdução ao Cálculo Diferencial I	Ano/Turma: 11º[redacted]

Sumário
Resolução de tarefas sobre a relação entre o sinal da função derivada e sentido de variação e extremos relativos de uma função.

Objetivos
Consolidar a relação entre o sinal da função derivada e o sentido de variação e extremos relativos de uma função.

Recursos			
Professor	Manual escolar Ficha de trabalho n.º 2 Projetor Computador Portátil	Aluno	Ficha de trabalho n.º 2 Manual escolar Calculadora gráfica

Principais Tópicos e conceitos envolvidos	Capacidades Transversais
Constatação por argumentos geométricos de que: *i)* se a derivada é positiva num intervalo aberto a função é crescente nesse intervalo e, se a derivada é negativa num intervalo aberto a função é decrescente nesse intervalo; *ii)* se a função é derivável num intervalo aberto e se tem um extremo relativo num ponto desse intervalo então a derivada é nula nesse ponto.	Comunicação Matemática Raciocínio Matemático Resolução de Problemas

Metodologia de trabalho
Trabalho autónomo dos alunos, individualmente ou em pares, na resolução das tarefas. Discussão dos resultados em grande grupo.

Momentos da aula	Tempo Previsto – Aula 90 minutos
(1) Entrada dos alunos. Ditado do sumário. Registo das faltas.	5min
(2) Conclusão das tarefas 2. e 4. da Ficha de Trabalho n.º 2, apresentação e discussão dos resultados[5]	25min
(3) Resolução, em grande grupo, da questão 3. da Ficha de Trabalho n.º 2[6]	13min
(4) Resolução da Proposta 3. da página 136 do manual escolar, apresentação e discussão dos resultados	20min
(5) Resolução da Tarefa "A População da Urbanização", apresentação e discussão dos resultados	25min
(6) Encerramento da aula	2min

Desenvolvimento da Aula
(1) Ditado do sumário e registo das presenças dos alunos.
(2) Conclusão das tarefas 2. e 4. da Ficha de Trabalho n.º 2, apresentação e discussão dos resultados Neste momento os alunos terão oportunidade de concluir as tarefas 2. e 4. da Ficha de Trabalho n.º 2 iniciadas na aula anterior. Ao longo de todo este momento a professora circulará pela sala de modo a apoiar, através do questionamento, os alunos com eventuais dificuldades. Uma vez que a grande maioria dos alunos concluiu praticamente na totalidade a questão 2., as dificuldades esperadas são relativas à resposta ao problema. Neste caso a professora deverá questioná-los acerca do contexto do problema e sobre objetivo do enunciado. Deverá ainda questioná-los sobre o valor que obtiveram para o comprimento da piscina e sobre a forma como poderão obter a largura da mesma a partir do valor de x. Na questão 4. os alunos que resolverem o problema através da relação entre o sinal da função derivada, sentido de variação e extremos da função original poderão demonstrar algumas dificuldades no cálculo dos zeros, uma vez que a função não está escrita da forma que conhecem, sendo que o termo de maior grau não é o primeiro. Assim, é expectável que os alunos, ao utilizarem a fórmula resolvente confundam os valores de a, b e c o que levará a erros no cálculo dos zeros. Neste caso, a professora deverá questionar os alunos sobre os valores de a, b e c, nomeadamente sobre os sinais dos mesmos. Além disso, uma vez que a maioria dos alunos opta por calcular os zeros manualmente (ao invés de aplicar a fórmula resolvente na calculadora gráfica) espera-se que, dado que os valores de a e b são números decimais, existam erros nos cálculos. Mais uma vez, a professora deverá questionar os alunos sobre os valores em questão e sobre eventuais erros de cálculo. Relativamente ao contexto do problema os alunos poderão evidenciar dificuldades em interpretar o valor de t, e responder de forma contextualizada à questão. Neste caso, a professora deverá interpelá-los sobre o contexto do problema e sobre o objetivo da questão, nomeadamente sobre a resposta pretendida, ou seja, se o problema questiona acerca da

[5] Não concluído na aula anterior
[6] Não realizado na aula anterior

	percentagem de doentes ou sobre o dia em que se verificou a percentagem máxima de doentes. Se durante a resolução das várias tarefas a professora se aperceber de dúvidas ou dificuldades generalizadas deverá interromper a aula e fazer uma explicação para toda a turma. Após o trabalho autónomo, as duas questões serão apresentadas e discutidas no quadro. Caso existam várias estratégias de resolução para os problemas de otimização poderão ser apresentadas várias resoluções representativas destas mesmas estratégias. Os alunos que apresentarem as suas resoluções deverão explicar aos colegas o seu raciocínio e apresentar todas as justificações necessárias. No final das apresentações dos problemas, a professora deverá discutir com a turma a eficácia das várias estratégias e fazer uma explicação para a turma, no caso de existirem dúvidas. Além disso a professora enfatizará a importância de dar uma resposta completa e contextualizada aos problemas, tendo sempre em atenção o que é pedido no enunciado.
(3)	Resolução em grande grupo da questão 3 da Ficha de Trabalho n.º2 Será projetada a questão 3 da ficha de trabalho e os alunos serão informados que esta questão será resolvida em grande grupo. Assim, a professora indicará aos alunos, uma vez que são quatro as representações gráficas apresentadas, que a justificação de cada uma das questões (se a representação pode ou não corresponder a uma função e à sua função derivada) será dada por um aluno, que deverá explicar aos colegas o seu raciocínio. Toda a turma terá oportunidade de colocar questões caso não concorde com a resposta dada pelo colega e neste caso expor o seu raciocínio. No final de cada justificação, a professora deverá enfatizar as principais conclusões de modo a assegurar-se que os alunos compreenderam as razões pelas quais determinada representação gráfica corresponde ou não a uma função é a sua respetiva função derivada.
(4)	Resolução da Proposta 3. da página 136 do manual escolar, apresentação e discussão dos resultados Os alunos resolverão autonomamente a proposta 3. da página 136 do manual escolar. Antes de os alunos iniciarem a resolução da proposta 3., a professora deverá fazer uma breve explicação sobre a relação entre a velocidade média e a derivada de uma função que expressa o espaço ou a distância percorrida em função do tempo decorrido. Assim, a professora deverá referir aos alunos que ao calcularem a taxa média de variação num certo intervalo de uma função que expressa a distância percorrida por um certo objeto em função do tempo, obtêm a velocidade média do objeto nesse intervalo. Em seguida a professora explicará aos alunos que ao calcularem a taxa de variação/derivada de uma função deste tipo num determinado instante obtêm a velocidade instantânea. Após esta breve explicação, os alunos não deverão manifestar muitas dificuldades nas questões 1. e 2., no entanto, caso algum aluno não tenha compreendido a explicação feita para a turma, a professora deverá dar-lhe outros exemplos, de modo a que este perceba a relação entre a derivada de uma função e a velocidade. No caso da questão 3. os alunos poderão revelar algumas dúvidas relativas ao próprio enunciado, pelo que a professora deverá questioná-los sobre as informações fornecidas no mesmo. Assim, uma vez que é pedido o instante para o qual a velocidade toma determinado valor, a professora deverá interpelar os alunos sobre o significado da velocidade instantânea e a sua relação com a derivada de uma função. Como é a primeira vez que os alunos têm de igualar a função derivada a determinado valor, resolvendo a equação, é natural que mostrem algumas dificuldades. Neste caso, a professora deverá relembrar-lhes que a derivada é uma função e que portanto devem atuar da mesma forma que nas situações onde têm de resolver equações. Após este momento de trabalho autónomo as questões serão apresentadas e discutidas, sendo que os alunos irão ao quadro apresentar as suas resoluções à turma, justificando todos os cálculos e explicando o seu raciocínio aos colegas.
(5)	Resolução da Tarefa “A População da Urbanização”, apresentação e discussão dos resultados

Os alunos resolverão autonomamente a Tarefa "A População da Urbanização", que será entregue pela professora.

Ao longo de todo este momento a professora circulará pela sala de modo a apoiar, através do questionamento, os alunos com eventuais dificuldades.

Na questão 1.(a) espera-se que alguns alunos possam manifestar dificuldades em encontrar a expressão da população da urbanização. Neste caso, a professora deverá questioná-los acerca da evolução da população ao longo dos anos (de acordo com o crescimento esperado) e se os alunos continuarem com dificuldades poderá até sugerir-lhes para fazerem uma tabela com a população ao longo dos anos de modo a encontrar a expressão geral.

Na questão 1.(b) alguns alunos poderão não se recordar do significado de taxa de variação, pelo que a professora deverá questioná-los acerca do foi feito em tarefas anteriores, nomeadamente na tarefa "Continuando na Estância de Ski" onde foi introduzido o conceito de taxa de variação/derivada.

Uma vez que os alunos associam o cálculo da taxa de variação num ponto à derivada por definição, é expetável que alguns recorram à definição para efetuar os cálculos. Caso tal ocorra, a professora deverá enfatizar que, apesar de o método estar correto, uma vez que não é expressamente pedido no enunciado, não há necessidade de calcular a derivada por definição, dado que consome muito tempo e está mais susceptível a erros de cálculo.

Uma vez que os alunos demonstram algumas dificuldades na interpretação de problemas contextualizados, é natural que, na interpretação dos valores da taxa de variação, surjam algumas dúvidas. Neste caso a professora deverá questioná-los sobre o contexto do problema e sobre o significado de taxa de variação num determinado ponto, fazendo, se necessário, uma analogia com o significado de taxa média de variação para um intervalo.

Na questão 1. (c) espera-se que os alunos mostrem algumas dificuldades na interpretação do enunciado, uma vez que não estão acostumados a questões de carácter tão aberto. Deste modo a professora deverá questioná-los sobre o tipo de informações que precisam para estudar a evolução da população, encaminhando-os para a ideia de, além de estudar a população inicial e final, precisam de estudar o momento em que a população é máxima e/ou mínima.

Após o trabalho autónomo, as questões serão apresentadas e discutidas no quadro. Caso existam várias estratégias de resolução para a última questão poderão ser apresentadas várias resoluções representativas destas mesmas estratégias. Os alunos que apresentarem as suas resoluções deverão explicar aos colegas o seu raciocínio e apresentar todas as justificações necessárias. No final das apresentação do problema, caso tenham sido apresentadas várias estratégias, a professora deverá discutir com a turma a eficácia das mesmas e fazer uma explicação para a turma, no caso de existirem dúvidas. Além disso a professora enfatizará a importância de dar uma resposta completa e contextualizada aos problemas, tendo sempre em atenção o que é pedido no enunciado.

(6) Encerramento da aula

Os alunos serão informados do trabalho de casa.

Comentário

Tendo em conta o ritmo de trabalho heterogéneo da turma serão propostos como extra:

- Proposta 25 da página 142

Caso alguma questão das questões propostas não seja realizada em aula, será considerada trabalho de casa.

Anexo 1.11. Planificação 11.ª aula

Aula de 18 de março de 2015 – Plano de Aula

Matemática	Introdução ao Cálculo Diferencial I	Ano/Turma: 11º[redacted]

Sumário
Resolução de tarefas sobre os conceitos abordados nas aulas anteriores.

Objetivos
Consolidar a relação entre o sinal da função derivada e o sentido de variação e extremos relativos de uma função.

Recursos			
Professor	Manual escolar Ficha de trabalho n.º 3 Projetor Computador Portátil	Aluno	Ficha de trabalho n.º 3 Manual escolar Calculadora gráfica

Principais Tópicos e conceitos envolvidos	Capacidades Transversais
Constatação por argumentos geométricos de que: *i)* se a derivada é positiva num intervalo aberto a função é crescente nesse intervalo e, se a derivada é negativa num intervalo aberto a função é decrescente nesse intervalo; *ii)* se a função é derivável num intervalo aberto e se tem um extremo relativo num ponto desse intervalo então a derivada é nula nesse ponto.	Comunicação Matemática Raciocínio Matemático Resolução de Problemas

Metodologia de trabalho
Trabalho autónomo dos alunos, individualmente ou em pares, na resolução das tarefas. Discussão dos resultados em grande grupo.

Momentos da aula	Tempo Previsto – Aula 90 minutos
(1) Entrada dos alunos. Ditado do sumário. Registo das faltas.	5min
(2) Apresentação e discussão da Tarefa "A População da Urbanização" [7]	20min
(3) Resolução, em grande grupo, da proposta 3. da página 136 do manual escolar[8]	15min
(4) Resolução da Ficha de Trabalho n.º3	48min
(5) Encerramento da aula	2min

Desenvolvimento da Aula
(1) Ditado do sumário e registo das presenças dos alunos.
(2) Apresentação e discussão da Tarefa "A População da Urbanização" Neste momento as questões serão apresentadas e discutidas no quadro. Na questão 1.(a), uma vez que durante as resoluções autónomas não houve, na generalidade, dúvidas, um aluno irá ao quadro apresentar a expressão que concluiu e explicar à turma o seu raciocínio para o caso de existirem alguns alunos que não conseguiram determinar a expressão pretendida. Na questão 1.(b) os alunos também não mostraram grandes dificuldades ao longo do trabalho autónomo, no entanto, após um aluno ir ao quadro apresentar a sua resolução e explicar a forma como procedeu aos colegas, a professora deverá enfatizar a interpretação dos valores da taxa de variação no contexto do problema. Além disso, uma vez que muitos alunos não conseguiram identificar a taxa de variação como derivada, a professora deverá mais uma vez explicar à turma que taxa de variação e derivada são o mesmo conceito e portanto se calculam da mesma forma. Deverá também realçar a ideia de que, apesar de até ao momento terem sempre associado a taxa de variação ao cálculo da derivada por definição, uma vez que já conhecem as regras de derivação, a menos que seja expressamente pedida a derivada por definição, podem e devem utilizar as regras. Na questão 1. (c) caso existam várias estratégias de resolução poderão ser apresentadas várias resoluções representativas destas mesmas estratégias. Os alunos que apresentarem as suas resoluções deverão explicar aos colegas o seu raciocínio e apresentar todas as justificações necessárias. No final da apresentação do problema, caso tenham sido apresentadas várias estratégias, a professora deverá discutir com a turma a eficácia das mesmas. Uma vez que, ao longo do trabalho autónomo a maioria dos alunos mostrou dificuldades na interpretação dos objetivos do enunciado, a professora deverá explicar à turma o tipo de estudo que deveriam ter feito para estudar a evolução da população. Além disso, uma vez que muitos alunos assumiram que ao calcularem a taxa de variação para os 4.º,5.º e 6.º anos estavam a estudar a evolução da população ao longo de seis anos (pois já tinham feito o mesmo cálculo para os três primeiros anos do período em questão), a professora deverá enfatizar, tal como na alínea anterior, o significado da taxa de variação num determinado instante e o tipo de informações que o cálculo desses respetivos valores fornecem no contexto do problema. No final, mais uma vez, a professora enfatizará a importância de dar uma resposta completa e contextualizada aos problemas, tendo sempre em atenção o que é pedido no enunciado.

[7] Não concluído na aula anterior
[8] Não realizado na aula anterior

(3) Resolução em grande grupo da proposta 3. da página 136 do manual escolar

Neste momento as três questões da proposta 3. serão resolvidas em grande grupo.

No início, a professora deverá fazer uma breve explicação sobre a relação entre a velocidade média e a derivada de uma função que expressa o espaço ou a distância percorrida em função do tempo decorrido. Assim, a professora deverá referir aos alunos que ao calcularem a taxa média de variação num certo intervalo de uma função que expressa a distância percorrida por um certo objeto em função do tempo, obtêm a velocidade média do objeto nesse intervalo. Em seguida a professora explicará aos alunos que ao calcularem a taxa de variação/derivada de uma função deste tipo num determinado instante obtêm a velocidade instantânea.

Após esta breve explicação, a professora solicitará a um aluno que resolva a questão 1, explicando à turma o seu raciocínio e cálculos. Caso no final da resolução algum aluno não tenha compreendido a explicação feita para a turma pelo colega a professora deverá fazer uma nova explicação e caso seja necessário dar outros exemplos, de modo que os alunos percebam a relação entre a derivada de uma função e a velocidade.

Na questão 2, tal como anteriormente, a professora indicará a um aluno para resolver esta questão, explicando aos colegas os seus procedimentos. Se surgirem dúvidas no cálculo da velocidade instantânea, a professora deverá relembrar que a velocidade num instante corresponde à taxa de variação nesse instante. Caso existam dúvidas no final desta questão, a professora deverá fazer outros exemplos e relacionar o cálculo da velocidade instantânea com o valor mostrado pelo conta-quilómetros de um automóvel.

No caso da questão 3., os alunos poderão revelar algumas dúvidas relativas ao próprio enunciado, pelo que a professora, antes de pedir a um aluno para apresentar a sua resolução, deverá questionar a turma sobre as informações fornecidas no mesmo. Assim, uma vez que é pedido o instante para o qual a velocidade toma determinado valor, a professora deverá interpelar os alunos sobre o significado da velocidade instantânea e a sua relação com a derivada de uma função. Como é a primeira vez que os alunos têm de igualar a função derivada a determinado valor, resolvendo a equação, é natural que mostrem algumas dificuldades. Neste caso, a professora deverá relembrar-lhes que a derivada é uma função e que portanto devem atuar da mesma forma que nas situações onde têm de resolver equações. Após esta breve explicação, um aluno irá então resolver a questão, explicando aos colegas a forma como procedeu e justificando todos os cálculos. No final, caso surjam dúvidas, a professora deverá intervir fazendo uma explicação para a turma de modo a assegurar-se que os alunos compreenderam a relação entre a derivada de uma função que expressa a distância em função do tempo e a velocidade.

Ao longo de todo este momento toda a turma deverá registar no caderno a resolução de cada uma das questões.

(4) Resolução da Ficha de Trabalho n.º 3

Os alunos resolverão autonomamente uma ficha de trabalho constituída por problemas de otimização que será entregue pela professora.

Ao longo de todo este momento a professora circulará pela sala de modo a apoiar, através do questionamento, os alunos com eventuais dificuldades.

No primeiro problema as duas questões iniciais não deverão conduzir a grandes dificuldades, no entanto, caso os alunos não percebam que têm de calcular $N(0)$ e $N(8)$ a professora deverá questioná-los acerca da forma como podem encontrar o número de pessoas para determinado instante, encaminhando-os para a ideia de que terão de substituir t por 0 e posteriormente por 8.

Na última questão, uma vez que os alunos já contactaram com problemas deste tipo nas últimas duas aulas e não manifestaram dificuldades, não são expectáveis grandes dúvidas. No entanto, caso alguns alunos mostrem dificuldades na determinação do valor mínimo de pessoas na bilheteira, a professora deverá questioná-los sobre que métodos conhecem para determinar máximos e mínimos de uma função.

De uma forma geral os alunos têm demonstrado alguma resistência em responder contextualizadamente aos problemas, pelo que a professora deverá, mais uma vez, reforçar a importância de dar uma resposta completa ao pedido do enunciado.

No problema 2. alguns alunos poderão ter dificuldade em determinar a expressão indicada. Neste caso, a professora deverá questioná-los sobre as dimensões da caixa e sua relação com o custo, bem como sobre a forma como poderão calcular a área das faces laterais tendo em conta o volume do prisma.
Na segunda parte da questão, os alunos não deverão revelar muitas dúvidas, uma vez que já fizeram um problema semelhante. No entanto, caso alguns alunos não desenvolvam uma estratégia para determinar o custo mínimo, a professora deverá questioná-los sobre as formas que conhecem para calcular valores mínimos e máximos. A professora deverá também enfatizar, caso os alunos recorram à relação entre o sinal da função derivada, sentido de variação e extremos da função original para resolver o problema, a importância de construírem o quadro de sinal de acordo com o domínio da função original e da função derivada, além de, obviamente, terem em consideração o contexto do problema.

No terceiro problema é natural que a maioria dos alunos mostre alguma reticência uma vez que não estão habituados a resolver problemas a partir da calculadora gráfica. Deste modo a professora, além de enfatizar a importância deste tipo de resoluções, frisando que são muitas vezes elemento de avaliação em exame nacional, deverá questionar os alunos sobre os comandos da calculadora que permitem calcular, neste caso, a altura máxima do arco. Deverá ainda reforçar a necessidade de apresentarem o(s) gráfico(s) que observaram na calculadora bem como a janela selecionada e todos os comandos utilizados. Mais uma vez, a professora sensibilizará os alunos para a necessidade de darem uma resposta contextualizada e de acordo com o pedido do enunciado, neste caso no que se refere, por exemplo, ao número de casas decimais.

Na quarta questão, não se espera que os alunos revelem grandes dificuldades na primeira alínea, uma vez que estão extremamente acostumados a este tipo de questão. No entanto, caso alguns alunos não se recordem da forma como se calcula o domínio de uma função racional, a professora deverá questioná-los sobre eventuais pontos onde esta função poderia ter problemas e sobre os seus conhecimentos acerca do denominador de uma função racional. Além disso, uma vez a função está apresentada de uma forma um pouco diferente (com três parcelas), alguns poderão sentir necessidade de reduzir todas as frações ao mesmo denominador e demonstrar algumas dificuldades nos cálculos. Neste caso, a professora deverá questioná-los sobre o processo ao qual recorrem frequentemente para reduzir frações ao mesmo denominador. Na alínea (b) alguns alunos poderão não se recordar da forma como se calcula a assíntota vertical ou mesmo sobre o significado do conceito, pelo que, neste caso, a professora deverá questioná-los sobre o que foi feito na unidade de ensino anterior (funções racionais) e caso eles continuem a manifestar dificuldades deverá fazer uma breve explicação.
Na alínea (c) é expectável que alguns alunos manifestem dificuldades na interpretação do próprio enunciado, nomeadamente no que se refere à restrição da função f. Neste caso, a professora deverá recordar-lhes o significado do conceito de restrição, sendo que, tendo em conta a explicação dada no enunciado, eles deverão concluir facilmente a necessidade de considerar apenas a função para valores de x entre 10 e 50. Relativamente à questão de minimizar a função, não se espera que os alunos demonstrem grandes dificuldades. No entanto, caso alguns alunos não compreendam o que se pretende ao pedir o custo mínimo recorrendo a métodos analíticos, a professora deverá questioná-los sobre o significado da expressão “por processos analíticos” e, caso eles não se recordem, a professora deverá referir que não podem utilizar a calculadora. Deverá também questioná-los sobre que métodos analíticos conhecem para determinar máximos e mínimos de uma função. Além disso, tal como no problema 2., caso os alunos recorram à relação entre o sinal da função derivada, sentido de variação e extremos da função original para resolver o problema, a professora deverá recordar-lhes a importância de construírem o quadro de sinal de acordo com o domínio da função original e da função derivada, além de obviamente, terem em consideração o contexto do problema.

No quinto problema, uma vez que este não está equacionado poderão surgir algumas dúvidas. No entanto, a professora deverá questionar os alunos sobre os dados do enunciado, incentivando-os a organizar as informações de que dispõe. Uma vez que o próprio enunciado fornece o valor da área, a professora deverá encaminhar os alunos para a necessidade de utilizar esta informação, relacionando-a com os respetivos preços de material. Após equacionarem o problema os alunos não deverão revelar grandes dificuldades em determinar o custo mínimo mas, caso estas surjam, a professora deverá questionar os alunos sobre os processos que conhecem para resolver este tipo de problemas. Mais uma vez, será enfatizada a importância de responder contextualizadamente ao problema.

No último problema, é natural que os alunos sintam algumas dificuldades em equacionar, pelo que, tal como no quinto problema, poderão surgir algumas resoluções por tentativa erro. Neste caso, a professora deverá chamar a atenção para a necessidade de justificar todos os procedimentos. Os alunos que optarem por equacionar o problema poderão ter dificuldades em definir a variável em questão e determinar a receita da escola em função da mesma. Se tal ocorrer, a professora deverá sugerir aos alunos que construam, por exemplo, um esquema ou tabela, em que relacionem o número de alunos e a receita que a escola obtém, de modo a que concluam a expressão geral. Além disso, os alunos poderão manifestar dificuldades em escrever a função por ramos e, neste caso, a professora deverá questioná-los sobre a forma como podem apresentar a expressão a que chegaram, uma vez que os valores da receita são obtidos por expressões diferentes se o número de alunos for menor ou maior que 150. Após equacionarem a expressão, os alunos que optarem por resolver o problema recorrendo à relação entre o sinal da função derivada, sentido de variação e extremos da função original não deverão apresentar dificuldades uma vez que derivada é uma função afim. No final do problema, a professora deverá indicar aos alunos que é necessário compararem o valor da receita obtida para o número de alunos que encontraram após derivarem a função com a receita obtida caso vendessem 150 viagens a 200 euros, de modo a que se apercebam em qual dos casos a receita obtida é maior. Tal como em todos os outros problemas a professora enfatizará a importância de respostas completas e contextualizadas.

(5) Encerramento da aula

Os alunos serão informados do trabalho de casa.

Comentário

Tendo em conta o ritmo de trabalho heterogéneo da turma serão propostos como extra:

- Proposta 25 da página 142

Caso a proposta 3 da página 136 não seja realizada em aula, será considerada trabalho de casa.

Anexo 1.12. Planificação 12.ª aula

Aula de 20 de março de 2015 – Plano de Aula

Matemática	Introdução ao Cálculo Diferencial I	Ano/Turma: 11º[redacted]

Sumário
Entrega das fichas de avaliação sumativa e correção de algumas questões. Auto-avaliação. Preenchimento das fichas de avaliação. Continuação da ficha de trabalho iniciada na aula anterior.

Objetivos
Consolidar a relação entre o sinal da função derivada e o sentido de variação e extremos relativos de uma função.

Recursos			
Professor	Ficha de trabalho n.º 3 Projetor Computador Portátil	Aluno	Ficha de trabalho n.º 3 Calculadora gráfica

Principais Tópicos e conceitos envolvidos	Capacidades Transversais
Constatação por argumentos geométricos de que: *i)* se a derivada é positiva num intervalo aberto a função é crescente nesse intervalo e, se a derivada é negativa num intervalo aberto a função é decrescente nesse intervalo; *ii)* se a função é derivável num intervalo aberto e se tem um extremo relativo num ponto desse intervalo então a derivada é nula	Comunicação Matemática Raciocínio Matemático Resolução de Problemas

nesse ponto.	

Metodologia de trabalho
Trabalho autónomo dos alunos, individualmente ou em pares, na resolução das ficha de trabalho.

Momentos da aula	**Tempo Previsto – Aula 90 minutos**
(1) Entrada dos alunos. Ditado do sumário. Registo das faltas.	5min
(2) Entrega das fichas de avaliação sumativa e preenchimento das fichas de auto-avaliação.	33min
(3) Continuação da Ficha de Trabalho n.º3, iniciada na aula anterior	50min
(4) Encerramento da aula	2min

Desenvolvimento da Aula
(1) Ditado do sumário e registo das presenças dos alunos.
(2) Entrega das fichas de avaliação sumativa e preenchimento das fichas de auto-avaliação. Neste momento a professora entregará as fichas de avaliação sumativa juntamente com uma proposta de resolução. Os alunos terão alguns minutos para se aperceberem dos seus erros e compararem as suas resoluções com a correção, sendo que, caso existam dúvidas, deverão colocá-las neste momento. Posteriormente a professora entregará as fichas de auto-avaliação, que os alunos deverão preencher.
(3) Continuação da Ficha de trabalho n.º3, iniciada na aula anterior Os alunos resolverão autonomamente a ficha de trabalho constituída por problemas de otimização que iniciaram na aula anterior. Ao longo de todo este momento a professora circulará pela sala de modo a apoiar, através do questionamento, os alunos com eventuais dificuldades. No primeiro problema as duas questões iniciais não deverão conduzir a grandes dificuldades, no entanto, caso os alunos não percebam que têm de calcular $N(0)$ e $N(8)$ a professora deverá questioná-los acerca da forma como podem encontrar o número de pessoas para determinado instante, encaminhando-os para a ideia de que terão de substituir t por 0 e posteriormente por 8. Na última questão, uma vez que os alunos já contactaram com problemas deste tipo nas últimas aulas e não manifestaram dificuldades, não são expectáveis grandes dúvidas. No entanto, caso alguns alunos mostrem dificuldades na determinação do valor mínimo de pessoas na bilheteira a professora deverá questioná-los sobre que métodos conhecem para determinar máximos e mínimos de uma função. De uma forma geral os alunos têm demonstrado alguma resistência em responder contextualizadamente aos problemas, pelo que a professora deverá, mais uma vez, reforçar a importância de dar uma resposta completa ao pedido do enunciado. No problema 2. alguns alunos poderão ter dificuldade em determinar a expressão indicada. Neste caso, a professora deverá questioná-los sobre as dimensões da caixa e sua relação com o custo, bem como sobre a forma como poderão calcular a área das faces laterais tendo em conta o

volume do prisma.
Na segunda parte da questão, os alunos não deverão relevar muitas dúvidas, uma vez que já fizeram um problema semelhante. No entanto, caso alguns alunos não desenvolvam uma estratégia para determinar o custo mínimo, a professora deverá questioná-los sobre as formas que conhecem para calcular valores mínimos e máximos. A professora deverá também enfatizar, caso os alunos recorram à relação entre o sinal da função derivada, sentido de variação e extremos da função original para resolver o problema, a importância de construírem o quadro de sinal de acordo com o domínio da função original e da função derivada, além de obviamente, terem em consideração o contexto do problema.

No terceiro problema é natural que a maioria dos alunos mostre alguma reticência uma vez que não estão habituados a resolver problemas a partir da calculadora gráfica. Deste modo a professora, além de enfatizar a importância deste tipo de resoluções, frisando que são muitas vezes elemento de avaliação em exame nacional, deverá questionar os alunos sobre os comandos da calculadora que permitem calcular, neste caso, a altura máxima do arco. Deverá ainda reforçar a necessidade de apresentarem o(s) gráfico(s) que observaram na calculadora bem como a janela selecionada e todos os comandos utilizados. Mais uma vez, a professora sensibilizará os alunos para a necessidade de darem uma resposta contextualizada e de acordo com o pedido do enunciado, neste caso no que se refere por exemplo, ao número de casas decimais.

Na quarta questão, não se espera que os alunos revelem grandes dificuldades na primeira alínea, uma vez que estão extremamente acostumados a este tipo de questão. No entanto, caso alguns alunos não se recordem da forma como se calcula o domínio de uma função racional, a professora deverá questioná-los sobre eventuais pontos onde esta função poderia ter problemas e sobre os seus conhecimentos acerca do denominador de uma função racional. Além disso, uma vez a função está apresentada de uma forma um pouco diferente (com três parcelas), alguns poderão sentir necessidade de reduzir todas as frações ao mesmo denominador e demonstrar algumas dificuldades nos cálculos. Neste caso, a professora deverá questioná-los sobre o processo ao qual recorrem frequentemente para reduzir frações ao mesmo denominador. Na alínea (b) alguns alunos poderão não se recordar da forma como se calcula a assíntota vertical ou mesmo sobre o significado do conceito, pelo que neste caso a professora deverá questioná-los sobre o que foi feito na unidade de ensino anterior (funções racionais) e caso eles continuem a manifestar dificuldades deverá fazer uma breve explicação.
Na alínea (c) é expetável que alguns alunos manifestem dificuldades na interpretação do próprio enunciado, nomeadamente no que se refere à restrição da função f. Neste caso a professora deverá recordar-lhes o significado do conceito de restrição, sendo que, tendo em conta a explicação dada no enunciado, eles deverão concluir facilmente a necessidade de considerar apenas a função para valores de x entre 10 e 50. Relativamente à questão de minimizar a função, não se espera que os alunos demonstrem grandes dificuldades. No entanto, caso alguns alunos não compreendam o que se pretende ao pedir o custo mínimo recorrendo a métodos analíticos, a professora deverá questioná-los sobre o significado da expressão por "processos analíticos" e, caso eles não se recordem, a professora deverá referir que não podem utilizar a calculadora. Deverá também questioná-los sobre que métodos analíticos conhecem para determinar máximos e mínimos de uma função. Além disso, tal como no problema 3., caso os alunos recorram à relação entre o sinal da função derivada, sentido de variação e extremos da função original para resolver o problema, a professora deverá recordar-lhes a importância de construírem o quadro de sinal de acordo com o domínio da função original e da função derivada, além de obviamente, terem em consideração o contexto do problema.

No quinto problema, uma vez que este não está equacionado poderão surgir algumas dúvidas. No entanto, a professora deverá questionar os alunos sobre os dados do enunciado, incentivando-os a organizar as informações de que dispõe. Uma vez que o próprio enunciado fornece o valor da área, a professora deverá encaminhar os alunos para a necessidade de utilizar esta informação, relacionando-a com os respetivos preços de material. Após equacionarem o problema os alunos não deverão revelar grandes dificuldades em determinar o custo mínimo, mas caso estas surjam, a professora deverá questionar os alunos sobre os processos que conhecem para resolver este tipo de problemas. Mais uma vez, será enfatizada a importância de responder contextualizadamente ao problema.

No último problema, é natural que os alunos sintam algumas dificuldades em equacionar, pelo que, tal como no quinto problema, poderão surgir algumas resoluções por tentativa erro. Neste caso, a professora deverá chamar a atenção para a necessidade de justificar todos os procedimentos. Os alunos que optarem por equacionar o problema poderão ter dificuldades em definir a variável em questão e determinar a receita da escola em função da mesma. Se tal ocorrer a professora deverá sugerir aos alunos que construam, por exemplo, um esquema ou tabela, em que relacionem o número de alunos e a receita que a escola obtém, de modo a que concluam a expressão geral. Além disso, os alunos poderão manifestar dificuldades em escrever a função por ramos e neste caso a professora deverá questioná-los sobre a forma como podem apresentar a expressão a que chegaram, uma vez que os valores da receita são obtidos por expressões diferentes se o número de alunos for menor ou maior que 150. Após equacionarem a expressão, os alunos que optarem por resolver o problema recorrendo à relação entre o sinal da função derivada, sentido de variação e extremos da função original não deverão apresentar dificuldades uma vez que derivada é uma função afim. No final do problema a professora deverá indicar aos alunos que é necessário compararem o valor da receita obtida para o número de alunos que encontraram após derivarem a função com a receita obtida caso vendessem 150 viagens a 200 euros, de modo a que se apercebam em qual dos casos a receita obtida é maior. Tal como em todos os outros problemas a professora enfatizará a importância de respostas completas e contextualizadas.

(4) Encerramento da aula

Comentário
Tendo em conta o ritmo de trabalho heterogéneo da turma serão propostos como extra: - Proposta 25 da página 142

Anexo 2 – Tarefas e Fichas de Trabalho

NOME: ____ TURMA _____

Anexo 2.1. Tarefa "Estância de Ski"

"Estância de Ski"

Parte I

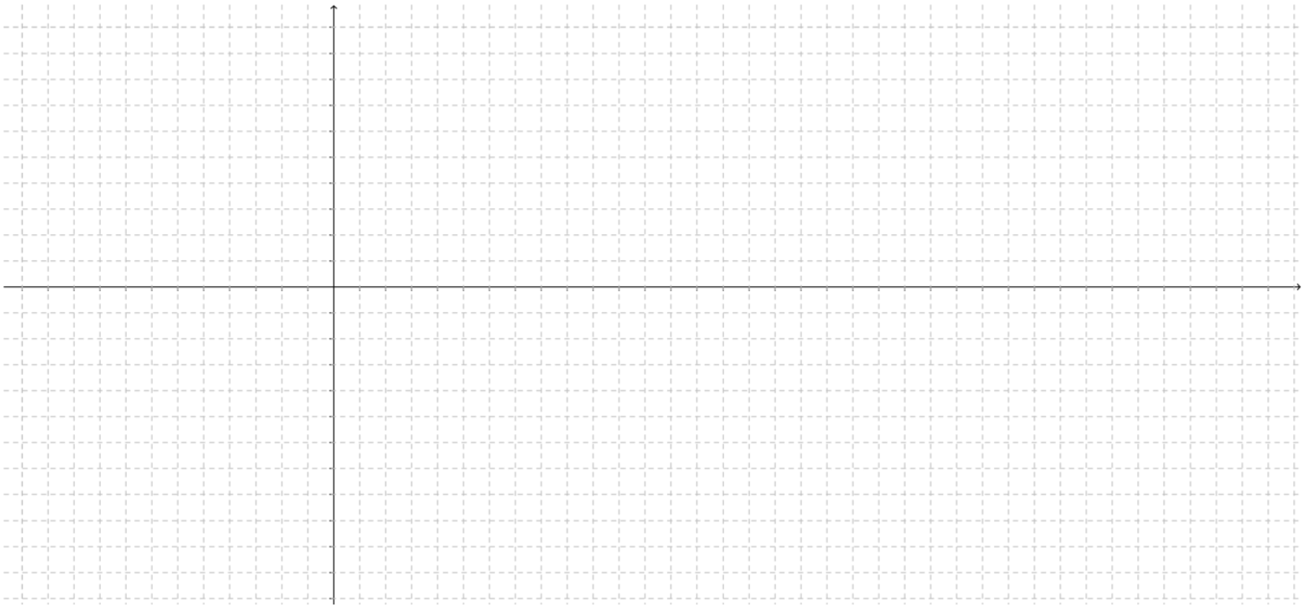
A previsão da temperatura numa estância de ski entre as 0 e as 8h de um certo dia é modelada pela expressão

$$f(t) = 0{,}5t^2 - 4t$$

que representa a temperatura em graus centígrados e em que t é o tempo decorrido em horas.

1. Representa graficamente esta função recorrendo ao GeoGebra e em seguida:

(a) Esboça o gráfico de f.



(b) Estuda a função quanto à monotonia e existência de extremos e interpreta os resultados obtidos no contexto do problema.

2. (a) Calcula $f(6) - f(4)$. Qual o significado do resultado no contexto do problema? E $f(3) - f(1)$?

(b) Qual a variação média da temperatura entre as 4 horas e as 6 horas?

Nota: Como a função relaciona a temperatura com o tempo, em **horas**, a variação média da temperatura num intervalo representa o valor que a temperatura variou, em média, em cada hora desse intervalo.

(c) Calcula a $t.m.v_{[4,6]}$ e compara o valor obtido com aquele que obtiveste na alínea anterior.

3. (a) Calcula a $t.m.v.$ nos seguintes intervalos:

Intervalo $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$	$\boldsymbol{t.m.v.}_{[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]}$
$[1,4]$	
$[6,8]$	
$[3,7]$	
$[2,5]$	

(b) Observa o gráfico e estuda a monotonia nos intervalos:

(i) $[1,4]$

(ii) $[6,8]$

(iii) $[2,5]$

(c) Tendo em conta os valores da taxa média de variação para os intervalos i), ii) e iii) que calculaste na 3. (b) podes conjeturar alguma relação entre a monotonia da função e a taxa média de variação num determinado intervalo? Se sim, qual? Explica o teu raciocínio.

Parte II

1. (a) Representa os pontos $A(1, f(1))$; $B(4, f(4))$; $C(6, f(6))$; $D(8, f(8))$; $E(3, f(3))$; $F(7, f(7))$; $G(2, f(2))$ e $H(5, f(5))$.

(b) Cria as retas AB, CD, EF, GH e preenche a tabela por observação da equação reduzida da reta.

Reta	Equação reduzida da reta	Declive da reta
AB		
CD		
EF		
GH		

(c) Preenche a seguinte tabela recorrendo aos valores encontrados nas tabelas 2 e 3 das questões 3.(a) Parte I e 1.(b) Parte II, respetivamente. Compara os resultados obtidos. O que podes conjeturar acerca da relação entre a taxa média de variação de um intervalo $[a, b]$ e o declive da reta que passa nos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$?

Intervalo $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$	$\boldsymbol{t.m.v.}_{[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]}$	Declive da reta que passa pelos pontos $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}))$ e $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{b}))$
$[1,4]$		
$[6,8]$		
$[3,7]$		
$[2,5]$		

NOME: ____ TURMA _____

Anexo 2.2. Tarefa "Continuando na Estância de Ski"

"Continuando na Estância de Ski"

Parte I

Recorda a função analisada na tarefa anterior em que a previsão da temperatura numa estância de ski entre as 0 e as 8h de um certo dia é modelada por:

$$f(t) = 0{,}5t^2 - 4t$$

que representa a temperatura em graus centígrados e em que t representa o tempo decorrido em horas.

1. (a) Preenche a tabela calculando a taxa média de variação da função f em cada um dos intervalos de números reais.

$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$	$\boldsymbol{t.m.v.}_{[a,b]}$
$[5,6]$	
$[5,5.5]$	
$[5,5.125]$	
$[5,5.01]$	

(b) Como podes observar a amplitude dos intervalos da tabela anterior é cada vez menor. Seguindo esse raciocínio e utilizando o seletor do GeoGebra escolhe três valores de h e preenche a tabela seguinte.

$\boldsymbol{h}$	$[\boldsymbol{5}, \boldsymbol{5+h}]$	$\boldsymbol{t.m.v.}_{[5,5+h]}$

(c) Tendo em conta os resultados obtidos nas tabelas anteriores, o que podes conjeturar acerca da taxa média de variação da função à medida que a amplitude do intervalo $[5{,}5+h]$ diminui?

Parte II

1. (a) Representa no GeoGebra os pontos $A(5, f(5))$, $B(6, f(6))$, $C(5.5, f(5.5))$, $D(5.125, f(5.125))$, $E(5.01, f(5.01))$ e $F(5+h, f(5+h))$.

(b) Constrói as retas AB, AC, $AD\ e\ AE$, no GeoGebra.

(i) Preenche a tabela por observação da equação reduzida das retas.

Retas	**Equação reduzida**	**Declive**
AB		
AC		
AD		
AE		

(ii) Como está a variar o declive das sucessivas retas? Relaciona essa variação com os resultados obtidos na questão 1.(c) da Parte I.

(iii) Constrói agora a reta AF e, fazendo diminuir o valor de h, analisa a variação do declive das sucessivas retas que se vão formando. O que observas?

(c) Representa graficamente, no GeoGebra, a reta r que contém o ponto A e cujo declive é a taxa de variação no instante $t = 5$.

(i) Qual a posição da reta r relativamente ao gráfico de f?

(ii) Qual a relação entre declive da reta r e o declive das retas que consideraste nas alíneas anteriores?

(iii) Tendo em conta a resposta dada às questões anteriores, como podes interpretar, do ponto de vista geométrico, a taxa de variação da função f no ponto $t = 5$? E num ponto qualquer do seu domínio?

NOME: ____ TURMA _____

Anexo 2.3. Tarefa “Derivando ponto a ponto”

“Derivando ponto a ponto”

Considera a função $f(x) = x^2$ e representa-a graficamente recorrendo à calculadora gráfica.

1. (a) Seleciona um ponto do gráfico desta função e regista a sua abcissa. Para isso, clica na tecla TRACE e coloca o cursor sobre um ponto do gráfico de f e de seguida clica em ENTER.

(b) Constrói a reta tangente ao gráfico de f no ponto selecionado. Para isso, tecla 2nd DRAW e seleciona 5: Tangent(e ENTER. Verás surgir no ecrã a reta tangente ao gráfico de f no ponto que fixaste anteriormente. Regista o declive da reta tangente.

(c) Procede de modo análogo para vários pontos do gráfico de f e preenche a seguinte tabela.

x	**Declive da reta tangente**

(d) A partir dos valores que registaste na tabela anterior, encontra uma expressão analítica que relacione o valor do declive da reta tangente ao gráfico de f num ponto com a abcissa x desse ponto.

NOME: ______________________________ TURMA _____

Anexo 2.4. Ficha de Trabalho n.º 1

Justifica todas tuas respostas, mesmo as de escolha múltipla.

1. A reta de equação $y = 1$ é tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 3. Qual o valor de:

$$\lim_{x \to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3}$$

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

2. Aplicando regras de derivação, determina $f'(x)$, sendo:

2.1. $f(x) = 3x^2 - 8$

2.2. $f(x) = -4x^2 - 5x + 12$

2.3. $f(x) = \frac{x^2}{2} - 7x$

2.4. $f(x) = \frac{6}{x}$

2.5. $f(x) = x^2 - \frac{5}{x}$

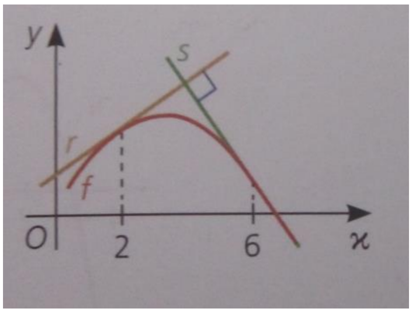
3. Considera a função f definida por $f(x) = x^3 - 4x^2 + 1$

3.1. Determina $f'(x)$.

3.2. Escreve uma equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1.

4. Na figura estão representados:

- O gráfico de uma função f
- A reta r, tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 2 e de equação $y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{4}$
- A reta s tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 6.



Sabendo que as retas r e s são perpendiculares, indica o valor de $f'(6)$.

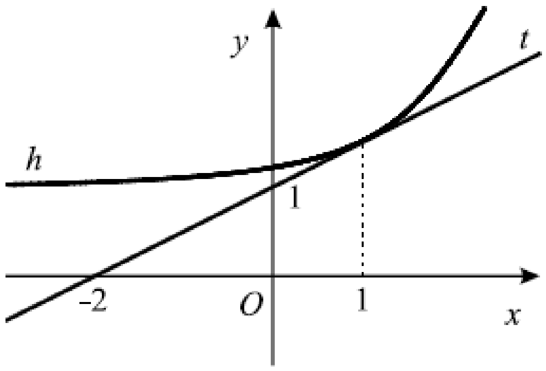
(A) $-\frac{3}{2}$ (B) $-\frac{4}{5}$ (C) $-\frac{2}{5}$ (D) $\frac{5}{3}$

Exame Nacional do 12.º ano

5. Determina o valor do declive da reta tangente ao gráfico da função $g(x) = -2x^2 + 1$, no ponto de ordenada -1 e abcissa negativa. Apresenta os cálculos efetuados.

6. Na figura estão representadas:

- parte do gráfico de uma função h
- uma reta t, tangente ao gráfico de h no ponto de abcissa 1



Tal como sugere a figura, a reta t intersecta o eixo Ox no ponto de abcissa -2 e o eixo Oy no ponto de ordenada 1.

Indica o valor de $h'(1)$, derivada da função h no ponto 1.

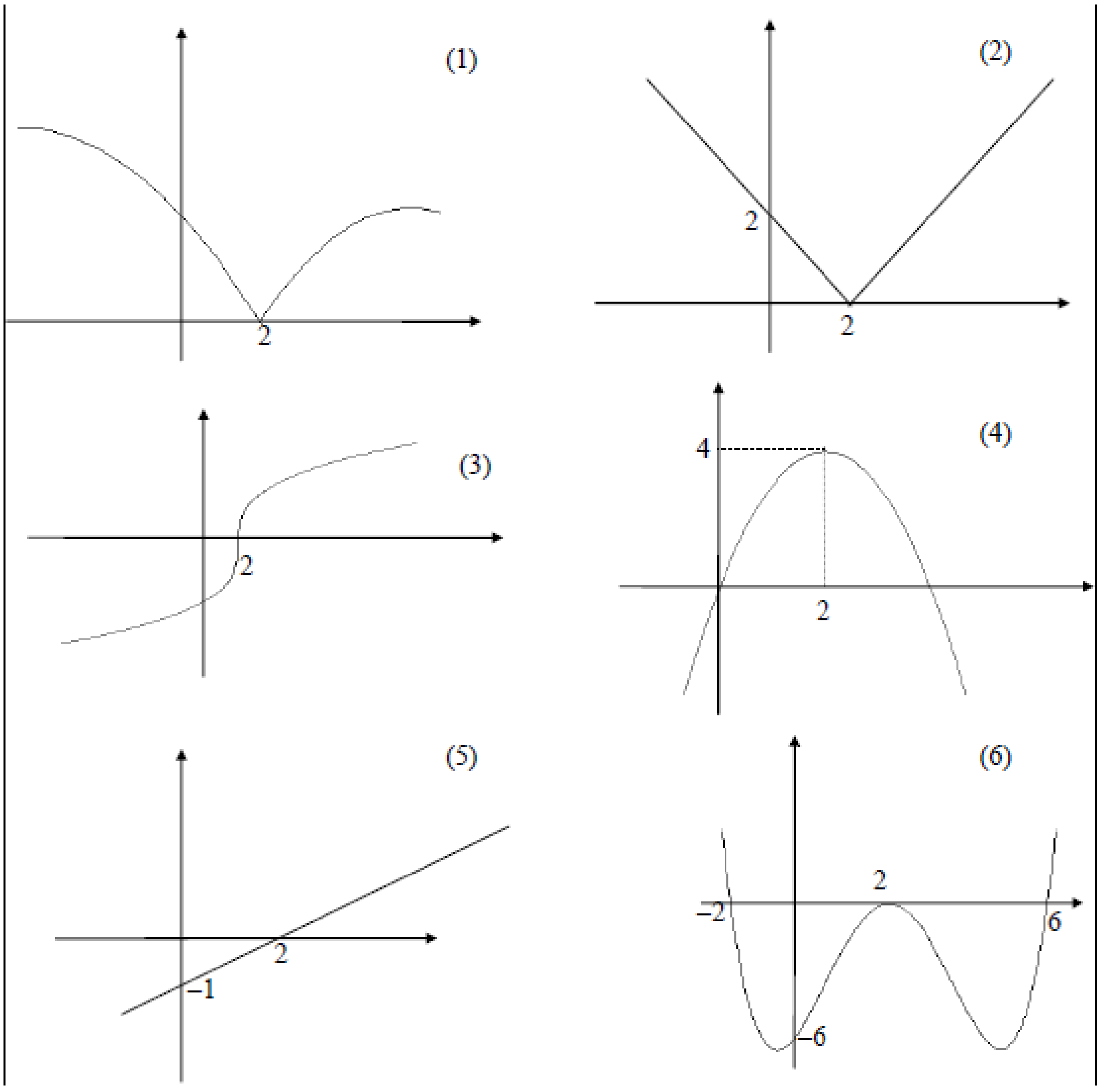
(A) -2 (B) $-\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 2

Teste Intermédio 11.º ano

7. A reta de equação $y = x$ é tangente ao gráfico de uma função f, no ponto de abcissa 0. Qual das expressões seguintes pode definir f?

(A) $x^2 + x$ (B) $x^2 + 2x$ (C) $x^2 + 2x + 1$ (D) $x^2 + x + 1$

8. Observa as representações gráficas das seguintes funções.



8.1. Em cada caso, indica se a função é ou não diferenciável no ponto de abcissa 2. Nota: <u>Uma função é **diferenciável** num ponto se tiver derivada finita nesse ponto, ou seja, se existir uma reta tangente ao gráfico da função nesse ponto e essa reta não for vertical.</u>

8.2. Para as funções que forem diferenciáveis indica o valor da derivada no ponto de abcissa 2.

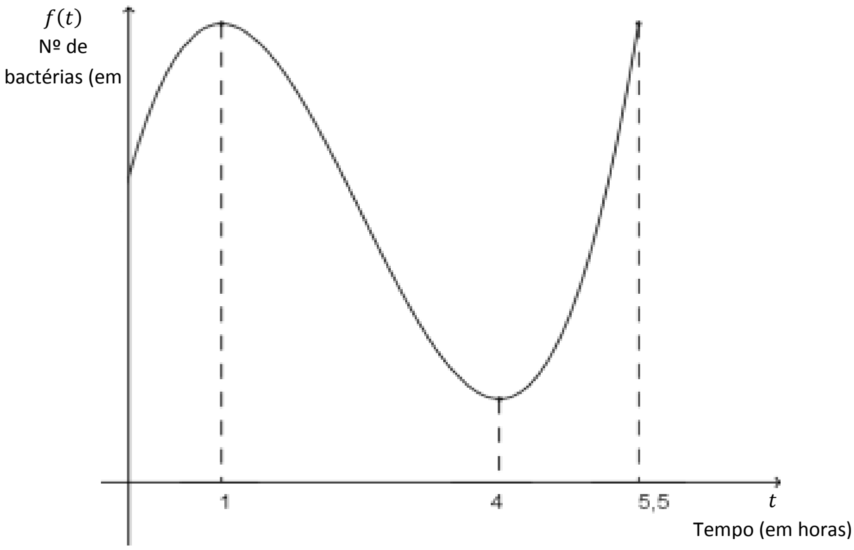
Adaptado de Brochura 11.º ano de Funções, Ministério da Educação

NOME: ______________________________ TURMA _____

Anexo 2.5. Tarefa "Evolução das bactérias"

"Evolução das bactérias"

Num laboratório realizou-se uma experiência que consistiu na observação do comportamento da reprodução de uma espécie de bactérias. O gráfico seguinte apresenta a evolução do número de bactérias ao longo de 5 horas e 30 minutos.



1. A partir da observação da representação gráfica, preenche a seguinte tabela.

Intervalo	**Sinal do declive da reta tangente em pontos de abcissas pertencentes ao intervalo**	**Sinal da Derivada**	**Sentido de variação da função (monotonia)**
$]0,1[$			
$]1,4[$			
$]4, 5.5[$			

2. Qual o valor da função derivada nos pontos de abcissa 1 e de abcissa 4? Justifica.

3. Admite agora que a expressão seguinte define a função representada graficamente acima:

$$f(t) = \frac{1}{3}t^3 - \frac{5}{2}t^2 + 4t + \frac{11}{3}, t \in [0, 5.5]$$

3.1. Determina $f'(t)$.

3.2. Estuda analiticamente o sinal de $f'(t)$ no intervalo considerado e compara com as respostas que deste nas questões 1 e 2.

4. Tendo em conta os resultados obtidos nas questões anteriores, que relação existe entre o sinal da função derivada num intervalo aberto e o sentido de variação da função nesse intervalo? Explica.

5. Com base nas conclusões da questão anterior, preenche a seguinte tabela indicando os zeros e sinal de f' e os extremos e a monotonia de f.

t					
f'					
f					

Que conjetura podes fazer acerca da relação entre os zeros da função derivada e os extremos da função original?

AGRUPAMENTO DE ESCOLAS
DE CANEÇAS

MATEMÁTICA A
11.º ano
março 2015

NOME: ____ TURMA _____

Anexo 2.6. Ficha de Trabalho n.º 2

1. Utilizando métodos exclusivamente analíticos, a partir do estudo do sinal da derivada, indica os intervalos de monotonia das seguintes funções e, caso existam, os extremos relativos das funções definidas pelas expressões:

(a) $f(x) = x^3 - x$

(b) $(x) = -x + \frac{1}{x}$

(c) $h(x) = |x + 1|$

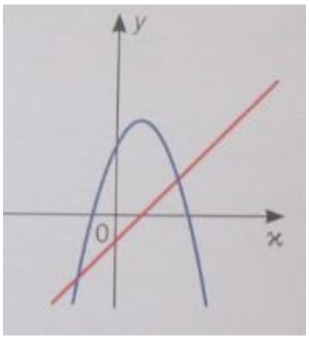
2. A Filipa pretende colocar no jardim da sua casa uma piscina retangular com 64 m^2 de área.

(c) Prova que o perímetro da piscina é dado pela expressão $P(x) = 2x + \frac{128}{x}$, onde x representa o comprimento da piscina, em metros.

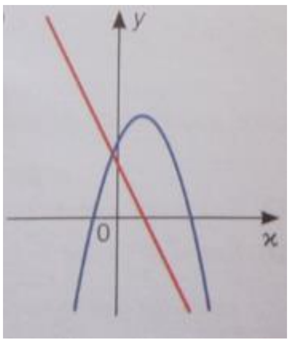
(d) Determina as dimensões da piscina para que o seu perímetro seja mínimo.

3. Em qual das seguintes figuras estão representados os gráficos de uma função e o da respetiva derivada? Justifica a tua resposta.

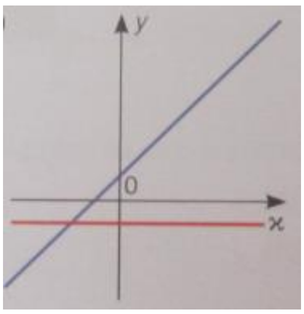
(A)



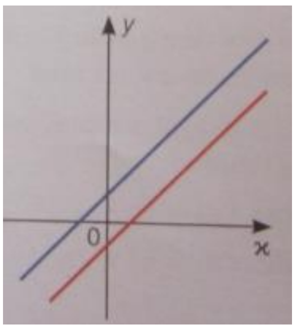
(B)



(C)



(D)

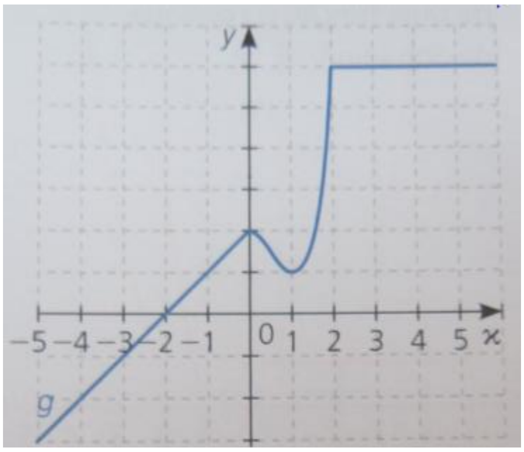


4. Médicos investigadores estudaram, durante 30 dias, a evolução de uma doença contagiosa, numa dada cidade. A percentagem da população infetada é dada por:

$p(t) = 0{,}3t^2 - 0{,}01t^3$, onde t representa o número de dias.

Em que dia do período estudado é máxima a percentagem de população infetada?

5. Na figura está representada, em referencial o.n., parte do gráfico de uma função g.



(a) Indica um intervalo em que a derivada de g seja nula.

(b) Indica pontos em que a função tenha um extremo relativo e diz, justificando, se existe, ou não, derivada nesse ponto.

(c) Constrói um quadro de sinais da derivada de g no intervalo $[-5,5]$.

NOME: ______________________________ TURMA _____

Anexo 2.7. Tarefa “ A População da Urbanização”

“A População da Urbanização”

1. Após a sua construção, uma nova urbanização em Lisboa tinha uma população de, aproximadamente, 500 pessoas. Tendo em conta a localização e a qualidade das infra-estruturas da urbanização foi estimado um crescimento anual de 100 habitantes.

(d) Encontra uma expressão para a população P da urbanização, t anos após a sua inauguração.

(e) Devido à crise económica, o aglomerado populacional não cresceu como estava previsto e a evolução da população tem um modelo mais ajustado na expressão:
$P(t) = 100(5 + t - 0.25t^2)$, onde t representa os anos passados após a inauguração da urbanização.
Qual foi a taxa de variação da população no 1.º ano? E no 2.º? E no 3.º?
Interpreta os resultados no contexto do problema.

(f) Adotando o modelo referido na alínea anterior, descreve como evoluiu a população da urbanização ao longo dos seis primeiros anos.

NOME: ____ TURMA _____

Anexo 2.8. Ficha de Trabalho n.º 3

1. Num determinado dia, junto às bilheteiras de um estádio de futebol, o número de pessoas na fila para tentar comprar bilhetes para um jogo decisivo da Liga dos Campeões, desde as 8h (abertura da bilheteira) até as 18h (encerramento da bilheteira) é dado pelo seguinte modelo matemático:

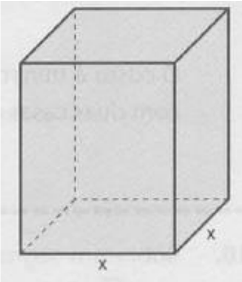
$N(t) = 20t^3 - 150t^2 + 240t + 323$, t em horas.

(d) Indica o número de pessoas que estavam na fila à hora que abriu a bilheteira.

(e) Quantas pessoas estavam ainda na fila quando a bilheteira encerrou?

(f) Determina o número mínimo de pessoas que estiveram na fila ao longo deste período. A que horas isso ocorreu?

2. Pretende-se construir uma caixa fechada com a forma de um prisma reto, de base quadrada, e com $300\ dm^3$ de capacidade.
O custo de fabrico da tampa e da base é de 30 cêntimos por dm^2 e o das faces laterais de 10 cêntimos por dm^2.



Mostra que o custo da caixa, em euros, é dado, em função de x, por $C(x) = 0{,}6x^2 + \frac{120}{x}$ e determina as dimensões da caixa de modo que o seu custo de fabrico seja mínimo. Apresenta os resultados aproximados às centésimas.

3. A figura representa uma ponte antiga em Lavertezzo, na Suíça. O seu arco tem uma altura (em metros) que é dada aproximadamente por uma parábola de equação $h(x) = -1{,}25x^2 - 37x + 123$, num certo sistema de eixos coordenados.

Determina, recorrendo à calculadora gráfica, as coordenadas do ponto mais alto do arco (aproximadas às décimas).

Nota: Deves justificar todos os passos, e apresentar o gráfico que visualizaste na calculadora bem como todos os comandos que utilizaste.

4.Considera a função real de variável real f, definida por $f(x) = \frac{x}{40} + 50 + \frac{10}{x}$

(a) Qual é o domínio da função f?

(b) Indica, justificando, a assíntota vertical da função f.

(c) Uma empresa fabrica um certo tipo de objetos e vende-os em lotes de x unidades, sendo $10 \leq x \leq 50$. O custo da produção, em centenas de euros, é dado pela função C, restrição da função f ao intervalo $[10,50]$. Recorrendo a métodos exclusivamente analíticos determina o valor mínimo desse custo.

5. Uma vidraça retangular com $10m^2$ de área é guarnecida por um friso em que o metro linear do material que é utilizado na horizontal custa 2€ e do material que é aplicado na vertical custa 5€. Determina as dimensões da vidraça de modo que o custo do friso seja mínimo e indica o respetivo custo.

6. Uma viagem de estudo organizada pela escola custará 200€ a cada estudante, se viajarem no máximo 150 estudantes. Contudo, o custo por estudante será reduzido em 0.5€ por cada estudante além dos 150. Quantos estudantes devem viajar para que a escola tenha a receita máxima.

Anexo 3 – Fichas de Avaliação

Anexo 3.1. Ficha de Avaliação 6 de março de 2015

GRUPO I

- As **cinco** questões deste grupo são de escolha múltipla
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais uma está correta
- Escreva na folha de repostas apenas a letra correspondente à alternativa que selecionar para responder a cada questão
- Se apresentar mais do que uma letra, o item será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível
- Não apresentes cálculos nem justificações

1. As seguintes figuras representam esboços dos gráficos das funções f e g.

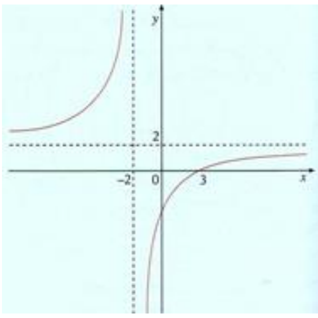


Gráfico da função f

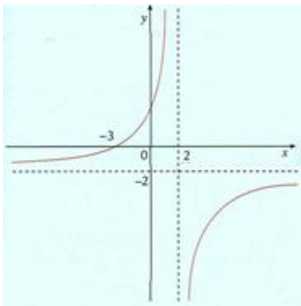


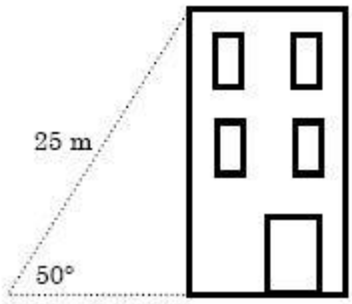
Gráfico da função g

Sabendo que o gráfico da função g se obtém por transformação a partir da função f, indique qual das seguintes opções representa a transformação correta.

(A) $g(x) = -2 + f(x)$ **(B)** $g(x) = -4 + f(x-4)$

(C) $g(x) = -4 + f(x+4)$ **(D)** $g(x) = 4 + f(x+4)$

2. Tendo em conta os dados da figura ao lado, qual é a altura aproximada do prédio?



(A) 19 m **(B)** 20 m

(C) 21 m **(D)** 22 m

3. Num referencial o.n., do espaço, as retas r e s são perpendiculares.

Um vetor diretor da reta r é $\vec{r} = (1, 2-k, 3)$.

As equações da reta s são $\frac{x-1}{3} = y = 1 - z$. O valor de k é:

(A) 2 **(B)** $\frac{1}{3}$ **(C)** 0 **(D)** -2

4. Num referencial o.n. do plano, a reta de equação $y = 2x$ é tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1. Indica o valor de

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

(A) -1 **(B)** 0 **(C)** 10 **(D)** **2**

5. Num referencial o.n. , os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ satisfazem as condições:

- $\vec{u}$ é perpendicular a $\vec{v}$
- $\|\vec{u}\| = 4$ e $\|\vec{v}\| = 3$

Então, pode concluir-se que $(\vec{u} + 2\vec{v}).(-\vec{u} + \vec{v})$ é igual a:

(A) -7 **(B)** -2 **(C)** 2 **(D)** 25

GRUPO II

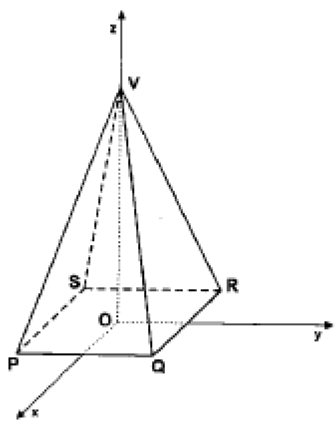
Nos itens deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efetuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exato**.

1. Mostra que, para qualquer $\alpha \in \Re$,

$$1 - cos^2 \alpha + \frac{sen^2\alpha}{tg^2\alpha} = 1$$

2. Considere, num referencial o.n. Oxyz, uma pirâmide regular de base quadrada (ver figura ao lado). O vértice V da pirâmide pertence ao semieixo positivo Oz. A base da pirâmide está contida no plano xOy. A aresta [PQ] é paralela ao eixo Oy. O ponto Q tem coordenadas (2,2,0).



2.1. Sabendo que, na unidade considerada, o volume da pirâmide é igual a 32, mostre que o vértice V tem coordenadas (0,0,6).

2.2. Mostre que o plano QRV pode ser definido pela equação $3y + z = 6$.

2.3. Determine uma condição que defina a reta que passa na origem do referencial e é perpendicular ao plano QRV.

2.4. Justifique que a intersecção da aresta [QV] com o plano de equação $z = 3$ é o ponto M(1,1,3).

3. Considera as funções reais f e g, definidas por $f(x)=\frac{2}{x+1}$ e $g(x)=\frac{x}{x+2}$

3.1. Indica o domínio e o contradomínio de f.

3.2. Mostra, **justificando**, que o gráfico de g tem duas assintotas e indica as suas equações.

3.3. Determina, analiticamente, na forma de intervalo, o conjunto dos números reais x tais que

$$f(x)\geq g(x)-1.$$

4. Considera a função $f(x) = x^2 + 1$

4.1. Calcula a taxa média de variação da função f no intervalo $[2,4]$

4.2. Calcula a taxa de variação para $x = 1$.

4.3. Determina a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1.

Bom Trabalho

Cotações:

Grupo I (50 pontos)

Questão	1	2	3	4	5
Cotação	10	10	10	10	10

Grupo II (150 pontos)

Questão	1	2.1	2.2	2.3	2.4	3.1.	3.2	3.3	4.1.	4.2	4.3
Cotação	15	10	20	10	15	10	12	20	10	15	13

Anexo 3.2. Ficha de Avaliação de 24 de abril de 2015

GRUPO I

- As **cinco** questões deste grupo são de escolha múltipla
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais uma está correta
- Escreva na folha de repostas apenas a letra correspondente à alternativa que selecionar para responder a cada questão
- Se apresentar mais do que uma letra, o item será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível
- Não apresentes cálculos nem justificações

--- Questão 1 ---

Sejam f e g duas funções reais tais que:

- As funções f e g tem domínio IR;
- A função f tem três zeros: -1, 2 e 3;
- 2 é o único zero da função g.

Quantos zeros tem a função $\frac{g}{f}$?

A) 3 **B)** 2 **C)** 0 **D)** 1

--- Questão 2 ---

Considera as funções *f* e *g*, definidas em $\mathbb{R}$, tais que $f(x)=\frac{3x-9}{x-1}$ e $g(x)=x-4$. Qual das afirmações é <u>falsa</u>?

(A) $(f\circ g)(2)=5$ (C) $(g\circ f)(2)=-7$

(B) $D_{f\circ g}=\Re\setminus\{5\}$ (D) $D_{g\circ f}=\Re\setminus\{5\}$

--- Questão 3 ---

Seja f a função trigonométrica definida por $f(x) = a \times \cos(x + b)$, sendo a e b números reais positivos.

Qual dos seguintes intervalos de números reais corresponde ao contradomínio da função f ?

A) $[-\mathbf{1}, \mathbf{1}]$ **B)** $[-\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}]$ **C)** $[-\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}]$ **D)** $[-\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}]$

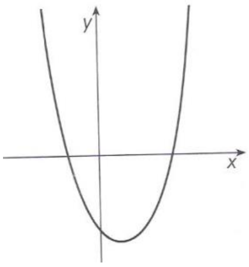
--- Questão 4 ---

Considera a função f, definida em $\mathbb{R}$, tal que

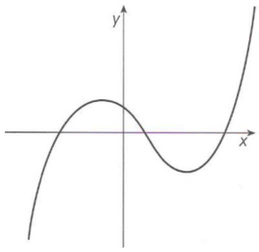
x	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
$f(x)$		↘	$f(-1)$	↗	$f(4)$	↘	

Uma representação gráfica de $f'(x)$ pode ser:

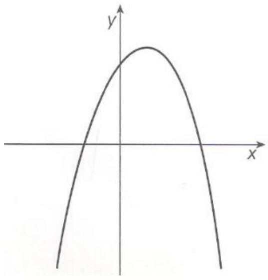
(A)



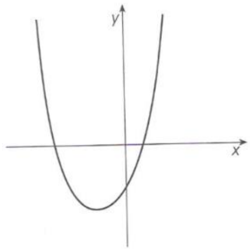
(B)



(C)

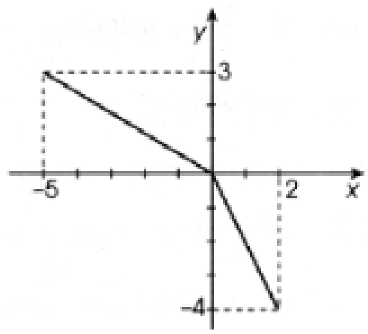


(D)

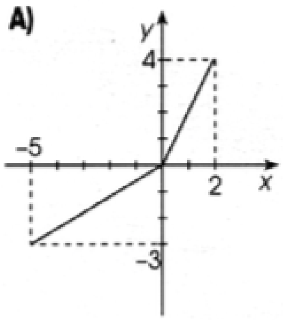


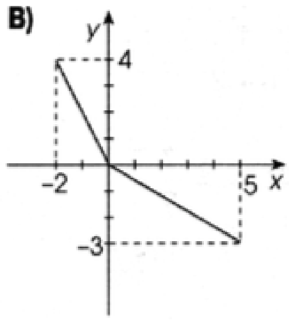
--- Questão 5 ---

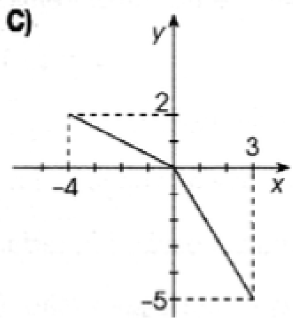
A figura ao lado é a representação gráfica de uma função g.

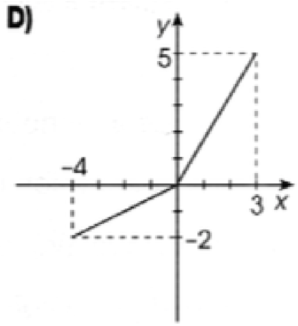


Então, o gráfico de g^{-1} será:









GRUPO II

Nos itens deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efetuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exato**.

--- Questão 1 ---

Seja g a função real de variável real, definida por $g(x) = \sin^2 x$.

1.1. Determina o conjunto-solução da equação $g(x) = \sin x$, no intervalo $[0, 2\pi]$.

1.2. Determina a $TMV_{\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]}$.

--- Questão 2 ---

Considere as funções f , g e j, reais de variável real, definidas por:

$$f(x) = \frac{2x+4}{x-3} \qquad g(x) = x^2 - 5x + 9 \qquad j(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 4$$

2.1. Mostre que f^{-1} , função inversa de f, pode ser definida no seu domínio pela expressão $\frac{4x+3}{x-2}$, e caracteriza-a.

2.2. Calcule $\left(f^{-1} \circ g\right)(2)$.

2.3. Indica o domínio da função $f \circ g$.

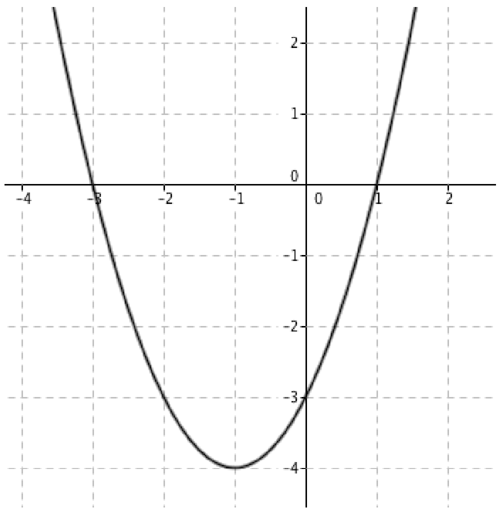
2.4. Resolve a inequação $f(x) < g(0)$.

2.5. Considera a função $h(x) = g(x) + j(x)$. Mostra que $h'(3) = 9$.

2.6. Escreve a equação da recta tangente ao gráfico de h no ponto de abcissa 3.

2.7. Estuda, analiticamente, a monotonia da função h.

--- Questão 3 ---



Na figura ao lado está representada, num referencial xOy, parte do gráfico de uma função quadrática f.

Seja g a função de domínio IR, definida por $g(x) = 2x + 4$.

3.1. Tendo em conta o gráfico de f e a expressão analítica de g, determina o conjunto solução da inequação, $\frac{g(x)}{f(x)} \geq 0$construindo uma tabela de sinais.

3.2. Sendo h a função definida por $h(x) = 2x^2 - 6x - 20$. Caracteriza a função $\frac{g}{h}$.

--- Questão 4 ---

Numa cidade asiática, registou-se um sismo que provocou muitos feridos. O número de indivíduos hospitalizados, x minutos depois do momento em que foram ativados os procedimentos de emergência médica é dado pela função f definida por:

$$f(x) = -x^2 + 90x + 100 \text{ com } x \in [0,100]$$

4.1. Calcula o número de indivíduos hospitalizados no momento em que se iniciaram os procedimentos de emergência.

4.2. Qual foi o número de indivíduos hospitalizados ao fim de uma hora?

4.3. Determina a taxa média de variação entre os 6 e os 10 minutos. Interpreta o resultado no contexto do problema.

4.4. Em que instante a taxa de variação do número de hospitalizados foi de 82 indivíduos?

4.5. Determina o momento em que foi máximo o número de indivíduos hospitalizados e indica esse número.

Bom Trabalho!

Anexo 4 - Autorizações

Anexo 4.1. Pedido de Autorização aos Encarregados de Educação

Pedido de Autorização – Encarregados de Educação

Exmo. Sr.
Encarregado de Educação

Eu, Joana Cabral, mestranda em ensino da matemática e estagiária sob a orientação da professora de Matemática Anabela Candeias do 11.º [redacted], venho comunicar que a turma irá participar, durante doze aulas de 90 minutos no 2.º Período, no Plano de trabalho de cariz investigativo no âmbito da unidade de ensino "Taxa de Variação e Derivada". Este projeto visa compreender de que forma os alunos se apropriam do conceito de derivada e das suas principais aplicações, bem como reconhecer as principais dificuldades sentidas neste tema. O trabalho de cariz investigativo em questão integra-se no âmbito da disciplina de Iniciação à Prática Pedagógica do curso de Mestrado em Ensino de Matemática da Universidade de Lisboa.

Deste Plano de trabalho não resultará qualquer prejuízo para os alunos, podendo com grande probabilidade resultar benefícios para a sua compreensão de conceitos e procedimentos matemáticos, nomeadamente no campo da Álgebra, não resultando ainda qualquer prejuízo no que diz respeito ao cumprimento do programa, No entanto, o interesse dos alunos em participar voluntariamente neste estudo e o consentimento dos respetivos encarregados de educação (preenchendo e assinando a ficha anexa), são duas condições essenciais para que se efetive a sua participação neste projeto.

O trabalho empírico terá por base o desempenho dos alunos do 11.º [redacted], devidamente autorizados, sendo objeto de análise, neste projeto: i) materiais produzidos dentro e fora da sala de aula pelos alunos, como, por exemplo, fichas de trabalho e relatórios; ii) transcrições de algumas das interações geradas entre eles; e iii) transcrições de questionários e entrevistas que lhes sejam realizadas, fora da sala de aula. A realização de questionários e entrevistas poderá decorrer, ocasionalmente, num horário previamente acordado com os alunos e respetivos encarregados de educação. Os dados recolhidos serão usados exclusivamente para o objetivo deste projeto, não sendo divulgados por nenhum meio os nomes dos alunos participantes, nem a identificação da escola, salvaguardando-se assim o seu anonimato.

Os alunos participantes e os respetivos encarregados de educação serão informados, ao longo do 2.º Período ou sempre que considerem necessitar de algum esclarecimento adicional, sobre o modo como estão a decorrer as atividades.

Antecipadamente grata pela colaboração de todos os intervenientes neste processo.

8 de janeiro de 2015

A Mestranda em Ensino da Matemática,

____

(Joana Cabral)

Autorização

Eu, encarregado de Educação do(a) aluno(a) ______________________________, n.º ____, da turma [redacted], do 11ºano de escolaridade, tomei conhecimento dos objetivos do Plano de trabalho de cariz investigativo no âmbito da unidade de ensino “Taxa de Variaçã e Derivada” que envolverá a turma, no âmbito da disciplina de Matemática, ao longo do 2.º Período, e ____________________________ (autorizo/ não autorizo) a participação do meu educando, de acordo com o documento anexo a este pedido de autorização.

Relativamente a realização de entrevistas e questionários, ou a outras atividades no âmbito deste projeto de trabalho, _________________________ (autorizo/não autorizo) que envolvam o meu educando, salvaguardando o seu anonimato.

Caneças, _____ de ___________________ de 2015

O(A) Encarregado(a) de Educação

____

Anexo 4.2. Pedido de Autorização à Direção

Pedido de Autorização – Direção

Exmo. Sr.
Diretor do Agrupamento
de Escolas de Caneças

Eu, Joana Cabral, mestranda em ensino da matemática e estagiária sob a orientação da professora de Matemática Anabela Candeias do 11.º [redacted], venho solicitar autorização para concretizar, nesta escola, o projeto de investigação em educação no âmbito da unidade de ensino "Taxa de Variação e Derivada". Este projeto visa compreender de que forma os alunos se apropriam do conceito de derivada e das suas principais aplicações, bem como reconhecer as principais dificuldades sentidas neste tema. O trabalho de cariz investigativo em questão integra-se no âmbito do curso de Mestrado em Ensino da Matemática, da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

A concretização deste projeto implicará a recolha de dados de alunos do 11º ano, referentes à disciplina de Matemática. O trabalho empírico terá por base o desempenho dos alunos do 11.º [redacted], ao longo do 2º Período nas diversas tarefas propostas. Serão objeto de análise, nesta investigação: i) materiais produzidos dentro e fora da sala de aula pelos alunos, como, por exemplo, fichas de trabalho e relatórios; ii) transcrições de algumas das interações geradas entre eles; e iii) transcrições de entrevistas que lhes sejam realizadas, fora da sala de aula. A recolha de dados envolverá a gravação em áudio e/ou vídeo de alguns destes momentos. Em todo o processo serão salvaguardados os direitos de privacidade e anonimato que assistem aos participantes e à própria escola, enquanto instituição. Os encarregados de educação serão informados sobre este estudo, sendo essencial o seu consentimento, para possibilitar a participação dos alunos que nele pretendam vir a colaborar.

5 de janeiro de 2015
Pede deferimento,

____

(Joana Cabral)

Anexo 4.3. Comunicação à Coordenadora do Departamento de Matemática

Comunicação – Departamento

Exma. Sra.
Coordenadora do Departamento de Matemática

Eu, Joana Cabral, mestranda em ensino da matemática e estagiária sob a orientação da professora de Matemática da turma 11.º [redacted], Anabela Candeias, venho comunicar que esta turma irá participar, durante o 2.º Período, no projeto de investigação em ensino no âmbito da unidade de ensino "Taxa de Variação e Derivada". Este projeto visa compreender de que forma os alunos se apropriam do conceito de derivada e das suas principais aplicações, bem como reconhecer as principais dificuldades sentidas neste tema. O trabalho de cariz investigativo em questão integra-se no âmbito do curso de Mestrado em Ensino da Matemática, da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

A concretização deste projeto encontra-se deferida pelo Diretor do Agrupamento, em comunicação datada de 5 de janeiro de 2015. Os objetivos do estudo serão, também, dados a conhecer ao Diretor de Turma, aos alunos e aos Encarregados de Educação. O interesse dos alunos em participar voluntariamente neste estudo e o consentimento dos respetivos Encarregados de Educação serão duas condições essenciais para que se efetive a sua participação neste projeto. O trabalho empírico terá por base o desempenho dos alunos do 11.º [redacted], devidamente autorizados, sendo objeto de análise, nesta investigação: i) materiais produzidos dentro e fora da sala de aula, como, por exemplo, fichas de trabalho e relatórios; ii) transcrições de algumas das interações geradas entre alunos; e iii) transcrições de entrevistas que lhes sejam realizadas, fora da sala de aula. A realização destas entrevistas decorrerá, ocasionalmente, em tempos relativos às áreas curriculares não disciplinares ou em outro horário previamente acordado com os alunos e respetivos Encarregados de Educação. A recolha de dados envolverá a gravação em áudio e/ou vídeo de alguns destes momentos.

Em todo o processo serão salvaguardados os direitos de privacidade e anonimato que assistem aos participantes e à própria escola, enquanto instituição.

Antecipadamente grata pela colaboração de todos os intervenientes neste processo.

8 de janeiro de 2015

Tomei Conhecimento:

A Mestranda

A Coordenadora Departamento

______________________________ ______________________________

A docente da disciplina

____

Anexo 4.4.Comunicação à Diretora de turma

Comunicação – Diretor de Turma

Exmo. Sra.
Diretora de Turma do 11.º [redacted]

Eu, Joana Cabral, mestranda em ensino da matemática e estagiária sob a orientação da professora de Matemática Anabela Candeias do 11.º [redacted], venho comunicar que a turma irá participar, durante o 2.º Período, no projeto de investigação em educação no âmbito da unidade de ensino "Taxa de Variação e Derivada". Este projeto visa compreender de que forma os alunos se apropriam do conceito de derivada e das suas principais aplicações, bem como reconhecer as principais dificuldades sentidas neste tema. O trabalho de cariz investigativo em questão integra-se no âmbito do curso de Mestrado em Ensino da Matemática, da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

A concretização deste projeto encontra-se deferida pelo Diretor do Agrupamento, em comunicação datada de 5 de janeiro de 2015. Os objetivos do estudo serão, também, dados a conhecer ao Departamento de Matemática, aos alunos e aos Encarregados de Educação. O interesse dos alunos em participar voluntariamente neste estudo e o consentimento dos respetivos Encarregados de Educação serão duas condições essenciais para que se efetive a sua participação neste projeto. O trabalho empírico terá por base o desempenho dos alunos do 11.º [redacted], devidamente autorizados, sendo objeto de análise, nesta investigação: i) materiais produzidos dentro e fora da sala de aula, como, por exemplo, fichas de trabalho e relatórios; ii) transcrições de algumas das interações geradas entre alunos; e iii) transcrições de entrevistas que lhes sejam realizadas, fora da sala de aula. A realização destas entrevistas decorrerá, ocasionalmente, em tempos relativos às áreas curriculares não disciplinares ou em outro horário previamente acordado com os alunos e respetivos Encarregados de Educação. A recolha de dados envolverá a gravação em áudio e/ou vídeo de alguns destes momentos.

Em todo o processo serão salvaguardados os direitos de privacidade e anonimato que assistem aos participantes e à própria escola, enquanto instituição.

Antecipadamente grata pela colaboração de todos os intervenientes.

8 de janeiro de 2015

Tomei Conhecimento:

A Mestranda

A Diretora de Turma

A docente da disciplina